Analysis 1, Übungsblatt Nr. 2

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 23.10.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Quantoren)**.** (a) Nehmen Sie an, Sie haben eine Aussage vom Typ

$$\forall x \exists y : P \wedge Q$$

bereits bewiesen, und nehmen Sie an, dass P die Variable x nicht enthält und Q nicht die Variable y enthält. Beweisen Sie

$$\exists y \forall x : P \wedge Q.$$

(b) Nehmen Sie an, Sie haben eine Aussage vom Typ

$$\forall x \exists y : P \vee Q$$

bewiesen, und nehmen Sie an, dass P die Variable x nicht enthält und Q nicht die Variable y enthält. Beweisen Sie

$$\exists y \forall x : P \vee Q.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für Aussagen P, Q an, die

$$\forall x \exists y : P \vee Q$$

erfüllen aber nicht die obigen strukturellen Annahmen über P und Q, und für die die Aussage

$$\exists y \forall x : P \vee Q$$

zu einem Widerspruch führt.

Aufgabe 2 (Induktion)**.** Das Summenzeichen $\sum$ ist so definiert, dass für eine Funktion f in einer natürlichen Variablen

$$\sum_{k=0}^{0} f(k) = f(0)$$

gilt und dass für jede natürliche Zahl n

$$\sum_{k=0}^{n+1} f(k) = \left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\right) + f(n+1)$$

gilt. Sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, sei $x \neq 1$ eine reelle Zahl, und seien $x_0, x_1 \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n \geq 0$ nicht negative reelle Zahlen. Zeigen Sie:

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

(d) (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} y_k^2\Big).$$

Aufgabe 3 (Distributivgesetze)**.** Es seien P, Q, R elementare Aussagen. Zeigen Sie:

(a) aus $P \wedge (Q \vee R)$ folgt $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

(b) aus $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ folgt $P \wedge (Q \vee R)$;

(c) aus $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ folgt $P \vee (Q \wedge R)$.

Aufgabe 4 (Parität)**.** In dieser Aufgabe sollen nur die Peano Axiome der natürlichen Zahlen sowie die elementaren Rechengesetze der Addition wie Kommutativität und Assoziativität angewendet werden.
Eine natürliche Zahl n heiße gerade, wenn sie als $n = a + a$ geschrieben werden kann für eine natürliche Zahl a.
Eine natürliche Zahl n heiße ungerade, wenn sie als $n = (a + a) + 1$ geschrieben werden kann für eine natürliche Zahl a. Beweisen Sie, dass (a) *jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist*, und beweisen Sie dass (b) *keine natürliche Zahl gerade und ungerade ist.*
Wir formulieren eine Version der Peano-Axiome:

(P1) Null ist eine natürliche Zahl.

(P2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger, dieser ist $n + 1$.

(P3) Die Zahl Null ist als einzige natürliche Zahl kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Sind die Nachfolger zweier natürlichen Zahlen gleich, so sind die zwei natürlichen Zahlen selbst gleich.

(P5) Gilt eine von einer natürlichen Zahl abhängige Eigenschaft für die Zahl Null, und folgt aus der Gültigkeit dieser Eigenschaft für eine Zahl n auch die Gültigkeit der Eigenschaft für die Zahl $n + 1$, so gilt diese Eigenschaft für jede natürliche Zahl.