Analysis 1, Präsenzübung 13

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Unbestimmte Integrale)**.** Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale (wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$):

(a) $\int \frac{x}{x^3+1} dx$

(b) $\int \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m dx$

(c) $\int x^3 \arctan x dx$

(d) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

Aufgabe 2 (Taylorentwicklung)**.** (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\left| f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq C(y-x)^2, \ \forall x, y \in [a, b].$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|^2 \leq 4\Big(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|\Big)\Big(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|\Big).$$

Aufgabe 3 (Taylorreihe)**.** Betrachten Sie die Funktion definiert durch $f(x) := \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $x \in (-1, 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ der Taylorreihe.

(c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe auf $|x| < \rho$ mit f übereinstimmt.

Aufgabe 4 (Uneigentliche Integrale)**.** Für welche $\alpha > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

konvergent?