Analysis 1, Präsenzübung 12

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Ableitungen)**.** Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) := \frac{x^2-2x}{(x+1)(x-3)}$; $(x \neq -1, 3)$

(b) $f_2(x) := \sin(x)\sinh(x)\cos(x)\cosh(x)$; $(x \in \mathbb{R})$

(c) $f_3(x) := e^{\sin(x^2)} + e^{(\sin(x))^2}$. $(x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 2 (Taylor)**.** Zeigen Sie: Für $x > 0$ gilt

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Aufgabe 3 (Vollständiges Elliptisches Integral 1. Gattung)**.** Für einen reellen Parameter k mit $|k| < 1$ sei

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Entwickeln Sie $E(k)$ als Funktion von k in eine Taylor-Reihe, indem man $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ durch die binomische Reihe darstellt.

Aufgabe 4 (Beta-Funktion)**.** Beweisen Sie:

(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha).$$

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\mathrm{B}\Big(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\Big).$$