Analysis 1, Präsenzübung 11

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen)**.** Sei $z_1 := -1 - i$ und $z_2 := 3 + 2i$.
Bestimmen Sie eine Zahl $z_3 \in \mathbb{C}$, so dass z_1, z_2, z_3 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Aufgabe 2 (Abzählbarkeit)**.** Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *algebraisch* falls sie eine Lösung einer Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \text{ mit } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ und } a_n \neq 0$$

ist. Zeigen Sie: Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Aufgabe 3 (Uneigentliche Integrale)**.** Zeigen Sie:

(a) Das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^s} dx$ divergiert für jedes $s \in \mathbb{R}$.

(b) Das Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ist konvergent.

(c) Das Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ ist konvergent.

Aufgabe 4 (Gamma-Funktion)**.** Sei $F : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $F(1) = 1$;

(ii) $F(x + 1) = xF(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$;

(iii) F ist logarithmisch konvex.

Zeigen Sie: Dann gilt $F(x) = \Gamma(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$.