Analysis 1, Präsenzübung 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Hilfssatz des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung)**.** Sei $F : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ monoton wachsend und konvex. Für $y \in \mathbb{Y}$, setze

$$f(y) = \sup\{a \in \mathbb{Y} : \forall x \in \mathbb{Y} : F(y) + ax \leq F(y+x)\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Y}$

$$F(y) + f(y)x \leq F(y+x).$$

Aufgabe 2 (Stetige Differenzierbarkeit)**.** Sei $F : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ eine monoton wachsende, konvexe Funktion, die stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{Y}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \neq x, |y-x| > \delta : \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - F'(x) \right| < \epsilon.$$

Aufgabe 3 (Summenregel)**.** Seien $f, g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ konvexe, monoton wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $f + g$ auch monoton wachsend ist und dass

$$(f+g)' = f' + g'$$

gilt.

Aufgabe 4 (Grenzwerte von Funktionen)**.** Seien $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie die existenten:

(a) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$

(d) $\lim_{x \to 0} x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

(e) $\lim_{x \nearrow 0} x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

(f) $\lim_{x \searrow 0} x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$

(g) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x$

(h) $\lim_{x \nearrow 2} \frac{x^2 - 14x + 24}{|x-2| + |x^2 - 4|}$.