Analysis 1, Präsenzübung 9

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Umkehrfunktion)**.** Sei $f : \overline{\mathbb{X}} \to \overline{\mathbb{X}}$ eine streng monoton wachsende und stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $\sup_{y \in \mathbb{Y}} f(y) = \infty$. Zeigen Sie, dass eine streng monoton wachsende und stetige Funktion $g : \overline{\mathbb{X}} \to \overline{\mathbb{X}}$ existiert mit

$$f(g(x)) = x \text{ und } g(f(x)) = x, \ \forall x \in \overline{\mathbb{X}}.$$

Aufgabe 2 ($\epsilon - \delta$)**.** Sei $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ eine Funktion, und sei $x \in \mathbb{Y}$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig im Punkt x ist, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{Y} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$

falls:

(a) f monoton wachsend ist;

(b) f von beschränkter Variation ist.

Aufgabe 3 (Stetigkeit)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen stetig sind:

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Dabei ist $\lfloor x \rfloor := n$ falls $n \leq x < n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \sin(\pi x)$.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie die angegebenen Funktionen.

Aufgabe 4 (Jensensche Ungleichung)**.** Seien $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ eine konvexe Funktion und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ zeigen Sie:

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$