Analysis 1, Präsenzübung 8

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Rechtsseitige Grenzwerte)**.** Es seien $f, g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ zwei monoton wachsende Funktionen. Zeigen Sie:

(a)
$$\lim_{\searrow} f \leq \lim_{\searrow} g \text{ falls } f \leq g,$$

(b)
$$\lim_{\searrow}(f+g) = \lim_{\searrow} f + \lim_{\searrow} g,$$

(c)
$$\lim_{\searrow} f = \lim_{\searrow} g \iff \lim_{\nearrow} f = \lim_{\nearrow} g.$$

Aufgabe 2 (Stetigkeit I)**.** Sei $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und additiv. Zeigen Sie, dass f in *allen* Punkten $x \in \mathbb{X}$ stetig ist.

Aufgabe 3 (Stetigkeit II)**.** Seien $f, g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen und $a \in \mathbb{X} \setminus \{\infty\}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn f und g stetig in a sind, dann gilt dies auch für

$$m(x) := \min\{f(x), g(x)\},$$
$$M(x) := \max\{f(x), g(x)\},$$
$$s(x) := f(x) + g(x).$$

(b) Die Funktionen f, g sind genau dann stetig in a, falls $f \cdot g$ stetig in a ist.

Hinweis. Beweisen Sie insbesondere die richtigen Implikationen in der Äquivalenz.

Aufgabe 4 (Umordnung von Reihen)**.** Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nicht absolut summierbar aber summierbar in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) \text{ existiere in } \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass eine Bijektion $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(n(k)) = \infty.$$