Analysis 1, Präsenzübung 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Suprema, Infima, Maxima, Minima: Beispiele)**.** Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der folgenden Mengen. Handelt es sich auch um Maxima und Minima?

(a) $M_1 = \{\frac{\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$,

(b) $M_2 = \{x^2 - 3x + 2 : x \in \mathbb{Y}\} \cap \{y \in \mathbb{X} : y < 5\}$,

(c) $M_3 = \{|x-1| + |x+1| : x \in \mathbb{X}\}$,

(d) $M_4 = \{3^{-m} + \frac{1}{\sqrt{n}} : m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$.

Skizzieren Sie die jeweiligen Mengen.

Aufgabe 2 (Suprema, Infima, Maxima, Minima: Eigenschaften)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{X}$ beschränkte Mengen mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann

(a)
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

(b)
$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass es Mengen A, B gibt, die die obigen Bedingungen erfüllen, so dass $\sup(A \cap B) < \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

(c) Wie sehen die entsprechenden Eigenschaften für "inf" aus? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 3 (Konvergenz von Folgen: Kriteria)**.** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ eine Folge. Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes vor Satz 3.7:

(a) f konvergiert eigentlich mit $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m \geq n : f(m) < a + \epsilon \wedge a < f(m) + \epsilon.$$

(b) f konvergiert uneigentlich genau dann, wenn

$$\forall x \in \mathbb{X} \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : f(m) > x \vee x = \infty.$$

Aufgabe 4 (Konvergenz von Folgen: Beispiele)**.** Berechnen Sie:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n},$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2014}{n+1} + \frac{2n}{2n+1}\Big),$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\Big),$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - \sqrt{4n^2 + 2n}).$$