Analysis 1, Präsenzübung 5

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Dyadische Zahlen)**.** In der Vorlesung haben wir die Menge $\mathbb{Y}$ der dyadischen Zahlen eingeführt. Sei $x \in \mathbb{Y}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(k)(n) \leq x < d(k)(n+1).$$

Aufgabe 2 (Mächtigkeiten)**.** (a) Geben Sie eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $p\mathbb{Z}$ an, wobei $p\mathbb{Z} := \{pz : z \in \mathbb{Z}\}$ für $p \in \mathbb{N}$ mit $p \neq 0$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und X eine beliebige n-elementige Menge. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ in Abhängigkeit von n. Finden Sie sowohl einen direkten als auch einen induktiven Beweis?

(c) Sei M eine beliebige Menge. Zeigen Sie: Es gibt keine Surjektion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ und keine Injektion $g : \mathcal{P}(M) \to M$.

Aufgabe 3 (Binärentwicklung)**.** Seien $x \in \mathbb{X} \cap [0,1)$ und $y \in \mathbb{Y} \cap [0,1)$ mit Binärentwicklungen

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$
$$y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > j$ so dass $a_k = 0$.

(b) Es existiert $j \in \mathbb{N}$, so dass $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > j$.

Aufgabe 4 (Bernoulli-Ungleichung und GM-AM, revisited)**.** (a) Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Zeigen Sie:

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(b) Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung vom Teil (a) mit $x = \frac{x_{n+1}-a}{(n+1)a}$, wobei $a := \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ um die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n$$

noch einmal zu beweisen.