Analysis 1, Präsenzübung 4

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (Mächtigkeit)**.** Zeigen Sie: Ist M eine unendliche Menge und A höchstens abzählbar, dann sind M und $M \cup A$ gleichmächtig.

Aufgabe 2 (Surjektivität, Injektivität und Bijektivität)**.** Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(b) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

(c) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(e) Wenn f surjektiv, aber g nicht injektiv ist, dann ist $g \circ f$ nicht injektiv.

Aufgabe 3 (Identitätsfunktionen, revisited)**.** In der Vorlesung haben wir die Folge von Funktionen I_n eingeführt, die die folgenden sechs Eigenschaften erfüllen:

(I1) $\forall x : \varphi(x) = x \vee \varphi(x) = \varphi$

(I2) $\varphi(0) \neq \varphi$

(I3) $\varphi(n) = \varphi$

(I4) $\nu(x) = \nu \Rightarrow \varphi(x) = \varphi$

(I5) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\nu(x) \neq n \wedge \varphi(x) \neq \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) \neq \varphi$

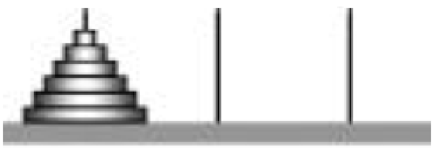
(I6) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\varphi(x) = \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) = \varphi$

In den Übungen haben wir bewiesen, dass die Funktion I_n existiert (wenn $n \neq 0$) und eindeutig ist. Beweisen Sie jetzt, dass die folgenden Aussagen gelten:

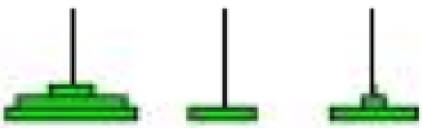
$$\begin{aligned} \forall x :& I_0(x) = I_0 \\ \forall n \forall x :& (x \neq n \wedge x \in \mathrm{Dom}(I_n) \wedge x \in \mathrm{Dom}(I_{\nu(n)})) \vee \\ & (x \neq n \wedge x \notin \mathrm{Dom}(I_n) \wedge x \notin \mathrm{Dom}(I_{\nu(n)})) \vee \\ & (x = n \wedge x \in \mathrm{Dom}(I_{\nu(n)})). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Auslöschungsgesetz der Addition)**.** Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes bis Vorlesung 5: Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt
$$n + k = m + k \Rightarrow n = m.$$

Aufgabe 5 (Türme von Hanoi)**.** Dieses Spiel wurde vom französischen Mathematiker Edouard Lucas im Jahre 1883 erfunden. Auf einem der drei vorhandenen Stäbe sind n Scheiben verschiedener Größe in Form einer Pyramide angeordnet:



Ein Zug besteht darin, von einem Stab die oberste Scheibe herunterzunehmen und auf einen anderen Stab zu setzen. Dabei darf aber niemals eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. So könnte also die Position nach einigen Zügen aussehen, wenn $n = 6$ ist:



Wir stellen uns die Frage, wie viele Züge wir brauchen um die komplette Pyramide von einem Stab auf einen der anderen beiden zu verschieben:

(a) Wie viele Züge brauchen Sie bei einer Scheibe? Und bei 2 Scheiben? Wie viele sind es bei 3 Scheiben?

(b) Versuchen Sie, eine Vermutung zu äußern wie die allgemeine Formel für n Scheiben aussieht.

(c) Beweisen Sie Ihre Vermutung durch Induktion.