Analysis 1, Präsenzübung 3

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

universität**bonn**

Aufgabe 1 (Vertauschungsregeln für Quantoren)**.** Beweisen Sie:

Ist $\exists x \exists y : P(x,y)$ bereits festgestellt, so können wir $\exists y \exists x : P(x,y)$ folgern.

Aufgabe 2 (Identitätsfunktionen)**.** Sei N eine natürliche Zahl. Wie im Skript untersuchen wir Funktionen φ, die die folgenden sechs Eigenschaften erfüllen

(I1) $\forall x : \varphi(x) = x \vee \varphi(x) = \varphi$

(I2) $\varphi(0) \neq \varphi$

(I3) $\varphi(N) = \varphi$

(I4) $\nu(x) = \nu \Rightarrow \varphi(x) = \varphi$

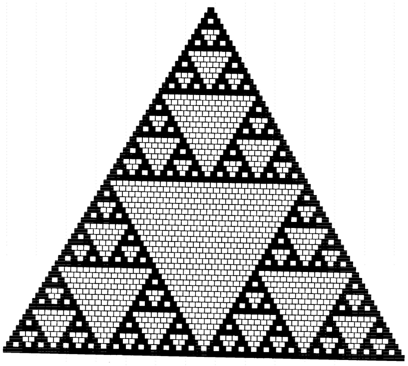
(I5) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\nu(x) \neq N \wedge \varphi(x) \neq \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) \neq \varphi$

(I6) $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : (\varphi(x) = \varphi \wedge \nu(x) = y) \Rightarrow \varphi(y) = \varphi$

Beweisen Sie mit den Methoden des Skriptes bis Vorlesung 4, dass für jede natürliche Zahl $N \neq 0$ eine Funktion ϕ existiert, die die obigen Eigenschaften erfüllt.

Bemerkung: Diese Funktion ist nach (Aufgabe 4, Übungsblatt Nr. 3) eindeutig.

Aufgabe 3 (Pascalsche Dreieck)**.** Ersetzt man im Pascalschen Dreieck die Einträge durch kleine rechteckige weiße und schwarze Kästchen, je nachdem der entsprechende Binomialkoeffizient gerade oder ungerade ist, so entsteht eine interessante Figur:



Wir bezeichnen das Kästchen, das dem Binomialkoeffizient $\binom{k}{\ell}$ entspricht, mit (k,ℓ). In der Figur sind alle Kästchen (k,ℓ) bis $k = 63$ dargestellt. Beweisen Sie dazu:

(a) $\binom{2^n-1}{\ell}$ ist ungerade für alle $0 \leq \ell \leq 2^n - 1$, d.h. die Zeile mit $k = 2^n - 1$ ist vollständig schwarz.

(b) $\binom{2^n}{\ell}$ ist gerade für alle $1 \leq \ell \leq 2^n - 1$.

(c) $\binom{2^n+\ell}{\ell}$ ist ungerade für alle $0 \leq \ell \leq 2^n - 1$.

(d) Das Dreieck mit den Ecken $(0,0), (2^n-1, 0), (2^n-1, 2^n-1)$ geht durch Verschiebung $(k,\ell) \mapsto (2^n + k, \ell)$ in das Dreieck $(2^n, 0), (2^{n+1}-1, 0), (2^{n+1}-1, 2^n-1)$ mit demselben Farbmuster über.

Aufgabe 4 (Monomialsatz)**.** Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

Die Summe wird hierbei gebildet über alle n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$ natürlicher Zahlen mit $k_1 + \ldots + k_n = k$. Der Ausdruck

$$\binom{k}{k_1, \ldots, k_n} := \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}$$

heißt auch *"Multinomialkoeffizient"*.