Analysis 1, Probeklausur, 08.01.2015

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
Wir bezeichnen die Menge der *dyadischen Zahlen* mit $\mathbb{Y}$ und die Menge der *erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen* mit $\mathbb{X}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sin x - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2

Sei

$$M := \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie den Supremum und den Infimum von M, und begründen Sie Ihre Behauptungen. Handelt es sich auch um ein Maximum und ein Minimum?

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz/absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}.$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie das Wurzelkriterium in der folgenden Form: Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$. Ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} < 1,$$

so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$$

Aufgabe 5

Sei A eine nichtleere Menge und sei B die Menge aller Funktionen $f : A \to I_2$ wobei $I_2 = \{0, 1\}$.
Zeigen Sie: Es gibt keine surjektive Abbildung $g : A \to B$.

Aufgabe 6

Sei $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Untersumme

$$L_k(\cosh, 0, 1)$$

und schreiben sie diese in einer Form, die das Summenzeichen nicht enthält.
Hinweis: Drücken Sie den hyperbolischen Kosinus durch die Exponentialfunktion aus.

Aufgabe 7

Sei f eine monoton wachsende konvexe Funktion $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$. Seien $a, b \in \mathbb{X}$ so dass

$$\forall x \in \mathbb{Y} : f(x) \leq ax + b.$$

Für die rechtseitige Ableitung, zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{Y} : f'(x) \leq a.$$

Aufgabe 8

Das Produktzeichen $\prod$ ist so definiert, dass für eine Funktion f in einer natürlichen Variablen

$$\prod_{k=0}^{0} f(k) = f(0)$$

gilt und dass für jede natürliche Zahl n

$$\prod_{k=0}^{n+1} f(k) = \Big(\prod_{k=0}^{n} f(k)\Big) \cdot f(n+1)$$

gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Beweisen Sie durch Induktion:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k = \frac{n^n}{n!}.$$