Analysis 1, Probe-Klausur

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1

Sei $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Zeigen Sie, dass für alle natrliche Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion Φ von

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}$$

die auf dem Intervall $(0,\infty)$ definiert ist und so dass $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1$.

(b) Ist es möglich, eine Stammfunktion Ψ von φ zu finden, wobei Ψ auf dem Intervall $(-\infty,0)$ definiert ist und $\lim_{x\to-\infty}\Psi(x)$ endlich ist?

Aufgabe 3

Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$

konvergent oder divergent ist. Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Jede Drehung der Riemannschen Zahlenkugel um die durch die Punkte $i, -i$ gehende Achse lässt sich darstellen durch eine Funktion der Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Aufgabe 5

Es sei $f_n(x) = 2n\Big((2x)^{\frac{1}{n}} - 1\Big)$, $x \in [1,\infty)$, eine Funktionenfolge.

(a) Zeigen Sie, dass f_n punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $[1,2]$ gleichmäßig ist.

(c) Ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[1,\infty)$?

Aufgabe 6

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integralen:

$$\text{(a)} \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x + x\ln^2 x} dx.$$

Aufgabe 7

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) := \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(t) dt.$$

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung h'.

(b) Nehmen Sie an, dass φ und f ungerade Funktionen sind. Zeigen Sie, dass h eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 8

Berechnen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \Big).$$

Aufgabe 9

Für welche $\alpha > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$$

konvergent? Begründen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Fourierschen Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = |x|$$

für alle $-\pi \le x \le \pi$.