Angewandte Mathematik und Statistik

Clemens Kienzler

Mathematisches Institut

Stand: 19. März 2015

Basierend auf früheren Vorlesungen von:
Prof. Sergio Conti
Verena Bögelein
Magnus Engenhorst
Natalie Grunewald
Antje Kiesel
Friedrich Kosswig
Max v. Renesse
Anja Voss-Böhme

kienzler@math.uni-bonn.de
http://www.math.uni-bonn.de/people/kienzler

http://www.math.uni-bonn.de/ag/ana/WiSe1415/AMAS.html

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

1.I. Logik und Beweis

Logische Aussagen

Eine *Aussage* ist ein Satz, von dem es Sinn ergibt zu behaupten, er sei wahr oder falsch.

1.1 Beispiel

- „Alle Katzen sind Säugetiere“: Eine wahre Aussage.
- „Alle Säugetiere sind Hunde“: Eine falsche Aussage.
- „Köln ist die schönste Stadt der Welt“: Eine wahre Aussage?
- „Nachts ist es kälter als draußen“: Keine Aussage.
- „P hat eine Tochter“: Eine Aussage mit Variablen.

Ein reines „oder“ in einer Aussage ist nie exklusiv zu verstehen.
Die Phrase „es existiert“ sagt nichts über die genaue Anzahl aus.
Statt „für alle“ schreibt man oft $\forall$, statt „es existiert“ auch $\exists$.

Negation von Aussagen

Sei A eine Aussage.
Die *Negation* $\neg A$ ist die Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist, und falsch ist, wenn A wahr ist.

1.2 Beispiel

A: „Alle Personen sitzen aufmerksam in der Vorlesung."
$\neg A$: „$\exists$ eine Person, die nicht aufmerksam in der Vorlesung sitzt."
NICHT: „Keine Person sitzt aufmerksam in der Vorlesung."

Es gilt:

- Die Negation der Negation ist die Aussage selber: $\neg(\neg A) = A$.
- $\forall$ wird in der Negation zu $\exists$ und umgekehrt.
- „und" wird in der Negation zu „oder" und umgekehrt.

Einfache Verknüpfung von Aussagen

Seien A und B Aussagen.
Die *Konjunktion* $A \wedge B$ ist die Aussage, die wahr ist, wenn A wahr ist und B wahr ist.
Die *Disjunktion* $A \vee B$ ist die Aussage, die wahr ist, wenn A wahr ist oder B wahr ist.

1.3 Beispiel

A: „P hat eine Tochter."
B: „P ist Vater."

Die Verknüpfungen sind wahr für manche P und falsch für andere:

- $A \vee B$ wahr $\forall$ Männer mit Kindern und $\forall$ Menschen mit Töchtern.
- $A \vee B$ ist zB falsch $\forall$ Frauen, die nur Söhne haben.
- $A \wedge B$ ist wahr $\forall$ Männer mit Töchtern.
- $A \wedge B$ ist zB falsch $\forall$ Frauen.

Logische Folgerungen

Die *Implikation* $A \Rightarrow B$ ist die Aussage, die nur falsch ist, wenn A wahr ist und B falsch ist.
Für „$A \Rightarrow B$ wahr“ zu zeigen: Immer wenn A wahr ist, ist auch B wahr.
Für „$A \Rightarrow B$ falsch“ reicht ein Gegenbeispiel.

Sprechweisen:

- „A ist *hinreichend* für B“, „B ist notwendig für A“.
- „Aus A folgt B“, „A impliziert B“.

Merke

Aus etwas wahrem kann nichts falsches folgen, aus etwas falschem alles.

- Weiß man, dass A falsch ist, dann ist die Aussage $A \Rightarrow B$ für jedes beliebige B wahr. (Unsinns-Gefahr!)
- Weiß man, dass A und B wahr sind, dann ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr. (Unsinns-Gefahr!)
- Weiß man, dass A und $A \Rightarrow B$ wahr sind, dann ist die Aussage B wahr. (Erkenntnis-Gewinn!)

1.4 Beispiel

A: „P hat eine Tochter."
B: „P ist Vater."
C: „P hat ein Kind."

- $A \Rightarrow B$ ist falsch. Gegenbsp: Ursula von der Leyen.
- $B \Rightarrow C$ ist richtig: Jeder Vater hat ein Kind.
- $A \Rightarrow C$ ist richtig: Jeder Mensch mit Tochter hat ein Kind.
- $B \Rightarrow A$ ist falsch. Gegenbsp: Jeder Vater, der nur Söhne hat.
- $C \Rightarrow A$ ist falsch. Gegenbsp: Jeder „Elter", der nur Söhne hat.
- $C \Rightarrow B$ ist falsch. Gegenbsp: Ursula von der Leyen.

Äquivalenz und Beweise

Die *Äquivalenz* $A \Leftrightarrow B$ ist die Aussage, die wahr ist, wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist und $B \Rightarrow A$ wahr ist.
Sprechweisen:

- A ist äquivalent zu B.
- A gilt genau dann, wenn B gilt. („gdw")
- A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.

Es gelten die folgenden Sätze:

- $(A \Rightarrow B \text{ und } B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Daraus ergeben sich mathematische Beweisverfahren um zu zeigen, dass B wahr ist, ausgehend davon, dass A wahr ist:

- Direkter Beweis: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$.
- Indirekter Beweis: $\neg B \Rightarrow D_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow D_n \Rightarrow \neg A$ oder anderer Widerspruch.

1. Grundlagen

1.II. Mengen

1.5 Definition

Eine *Menge* ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die einzelnen Objekte heißen *Elemente* der Menge.

„Naiver“ Mengenbegriff: Kann zu Widersprüchen führen. Für uns aber vermeidbar.

Schreibweisen:

- Aufzählung: $M = \{a, ?, c, \diamond\}$.
- Beschreibung: $M = \{a \mid a \text{ hat gewisse Eigenschaften}\}$.
- $a \in M$ $\quad$ a ist Element von M.
- $a \notin M$ $\quad$ a ist nicht Element von M.
- Leere Menge $\emptyset$ oder $\{\}$.

Mengen zum Zweiten

Nach der Definition gilt:

- Ein Element kann nur einmal in einer Menge vorkommen.
- Die Anordnung der Elemente ist beliebig.

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

1.6 Beispiel

- $\{L, A, U, F\} = \{F, A, U, L\} = \{A, A, F, F, L, L, U, U\}$.
- $\{\text{Teams} \mid \text{Team stand im WM-Finale 2014}\} = \{\text{D, ARG}\}$.
- $\{\text{Kühe} \mid \text{Kuh ist männlich}\} = \emptyset$.
- $M = \{\text{Mengen } A \mid A \notin M\}$ führt zu Widersprüchen $\to$ Russels Barbier-Paradoxon.

1.7 Definition

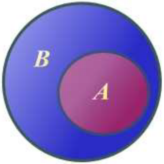
Gegeben zwei Mengen A und B.

- Wir sagen A ist *Teilmenge* von B, geschrieben $A \subset B$, genau dann wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
- Die *Vereinigung* $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente, die in A **oder** in B liegen.
- Der *Schnitt* $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente, die in A **und** in B liegen.
- Die *Differenz* $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente von A, die nicht in B liegen.

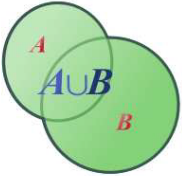
Beachte:

- Laut Definition ist $A \subset B$ auch, wenn $A = B$.
- Sogenannte echte Teilmengen schreiben wir $A \subsetneq B$.
- Es gilt: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ und $B \subset A$.

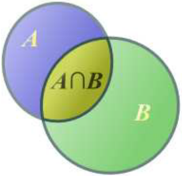
Veranschaulichung von Mengenoperationen



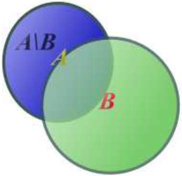
Teilmenge



Vereinigung



Schnitt



Differenz

1.8 Definition

Gegeben zwei Mengen X und Y.
Das *kartesische Produkt* $X \times Y$ ist die Menge aller geordneten Paare aus X und Y, d.h. $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

Beachte:

- Statt „kartesisches Produkt von X und Y" sagt man auch „Kreuzprodukt von X und Y" oder einfach „X Kreuz Y". Außerdem spricht man von einem geordneten Paar als „Tupel".
- Im Allgemeinen gilt $X \times Y \neq Y \times X$, das heißt bei Tupeln spielt - anders als bei Mengen - die Reihenfolge eine Rolle.

1.9 Beispiel

Seien $X := \{*, \circ, 1\}$ und $Y := \{1, \circ\}$.
$X \times Y = \{(*, 1), (*, \circ), (\circ, 1), (\circ, \circ), (1, 1), (1, \circ)\}$.

1. Grundlagen

1.III. Abbildungen

1.10 Definition

Gegeben zwei nicht-leere Mengen X und Y.
$f \subset X \times Y$ ist eine *Abbildung* von X nach Y, wenn es für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt, so dass $(x, y) \in f$.

Statt $(x, y) \in f \subset X \times Y$ schreiben wir

$$f : X \longrightarrow Y, \; x \mapsto y$$

und fassen f nicht mehr als Menge, sondern als eigenständiges Objekt auf, das durch die Abbildungsvorschrift gegeben ist.

Merke

Eine Abbildung von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedes $x \in X$ auf genau ein $y \in Y$ abbildet.

Wie Mengen kann man auch Vorschriften durch Aufzählung oder Beschreibung angeben.

1.11 Definition

Gegeben eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$.

- X ist die *Definitionsmenge*, Y die *Zielmenge* von f.
- Das Element von Y, auf das $x \in X$ abgebildet wird, ist das *Bild* von x unter f, geschrieben $f(x)$, und
$$\{f(x) \mid x \in X\} =: f(X)$$
ist die *Bildmenge* von f.
- Das Element von X, das auf $y \in f(X)$ abgebildet wird, ist das *Urbild* von y unter f, geschrieben $f^{-1}(y)$.
- Der *Graph* von f ist
$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} =: \operatorname{graph} f.$$

Abbildungen zum Zweiten

Damit f eine Abbildung von X nach Y ist, muss gelten:

- Jedes $x \in X$ wird durch f auf ein $y \in Y$ geworfen.
- Kein $x \in X$ wird durch f auf mehr als ein $y \in Y$ geworfen.

Umgekehrt kann bei einer Abbildung f von X nach Y gelten:

- Nicht jedes $y \in Y$ wird durch f von einem $x \in X$ getroffen.
- Ein $y \in Y$ wird durch f von mehr als einem $x \in X$ getroffen.

1.12 Beispiel

$X := \{*, \circ, 1\}$, $Y := \{\square, 1, M, \circ\}$.

- $f\colon * \mapsto 1,\ \circ \mapsto \square,\ 1 \mapsto \circ$: Ja. Ja. $\Rightarrow$ JA. Ja. Nein.
- $f\colon * \mapsto 1,\ \circ \mapsto \square,\ 1 \mapsto \circ,\ \circ \mapsto M$: Ja. Nein. $\Rightarrow$ NEIN.
- $f\colon 1 \mapsto 1,\ \circ \mapsto \circ$: Nein. Ja. $\Rightarrow$ NEIN.
- $f\colon x \mapsto \square$ für alle $x \in X$: Ja. Ja. $\Rightarrow$ JA. Ja. Ja.

1.13 Definition

Gegeben eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$.
f ist *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn es zu jedem $y \in f(X)$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

- Für Injektivität zu zeigen: $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Eine injektive Abbildung f ist *umkehrbar*, das heißt es existiert die *Umkehrabbildung*

$$f^{-1} : Y \supset f(X) \longrightarrow X,$$

$$\text{gegeben durch } y \mapsto f^{-1}(y) \text{ für alle } y \in f(X).$$

Beachte: Notation $f^{-1}(y)$ nun doppelt belegt, aber konsistent.

Im selben Zusammenhang findet man oft folgende Begriffe:

- Eine Funktion mit $f(X) = Y$ ist *surjektiv*.
- Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, ist *bijektiv*.

Verkettung von Abbildungen

1.14 Definition

Gegeben die Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$.
Dann ist die *Komposition* oder *Verkettung* von g und f die Abbildung

$$g \circ f : X \longrightarrow Z,$$

gegeben durch $x \mapsto g(f(x))$ für alle $x \in X$.

1.15 Proposition

Wenn $f : X \longrightarrow Y$ injektiv ist, dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$, wobei die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ gegeben ist durch $x \mapsto x \; \forall \, x \in X$.

Genauso gilt natürlich auch $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(X)}$.

1. Grundlagen

1.IV. Zahlen

Natürliche Zahlen

- Die Menge der *natürliche Zahlen* sei $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Soll die 0 enthalten sein, dann schreiben wir $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}_0$ sei mit der üblichen Ordnung „$<$“, und den üblichen Verknüpfungen, dh Addition „$+$“ und Multiplikation „$\cdot$“, versehen.

Das Produkt und die Summe natürlicher Zahlen sind wieder natürliche Zahlen, und es gelten (für $* \in \{+, \cdot\}$) die folgenden

Rechengesetze

- $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Assoziativgesetz).
- $a * b = b * a$ (Kommutativgesetz).
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Distributivgesetz).

Mehr zu den natürlichen Zahlen

Vereinbarungen:

- Wir lassen den Punkt der Multiplikation weg: $a \cdot b = a\,b$.
- Punkt vor Strich.
- Wir lassen unnötige Klammern weg: $(a + b) + c = a + b + c$ und $(a\,b) + c = a\,b + c$.

1.16 Proposition

Es gibt keine größte natürliche Zahl.

Beweis

Indirekter Beweis:
Wir nehmen an, dass es eine größte natürliche Zahl gibt und bezeichnen sie mit N. Dann ist aber auch $N + 1$ eine natürliche Zahl, und es gilt $N + 1 > N$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Hintergrund

- Die natürlichen Zahlen haben sich aus dem (endlichen) Zählen entwickelt, sie umfassen die natürlich vorkommenden Anzahlen.
- Im Laufe der Zeit hat man den Zahlen von Eins bis Neun eigene Zahlzeichen $1, \ldots, 9$ gegeben (Indien vor ca. 2500 Jahren).
- Die Null ist keine natürliche Anzahl, sondern eine menschliche Erfindung. Das Zahlzeichen 0 war schon relativ früh als Lückenzeichen gebräuchlich (Irak vor ca. 4000 Jahren). Erst später begriff man „das Nichts“ als Zahl (vermutlich Ägypten vor ca. 2200 Jahren).
- Es folgte die Entwicklung des dezimalen Stellensystems mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ (Indien vor ca. 2000 Jahren): Jede natürliche Zahl kann als dezimale Ziffernfolge dargestellt werden.
- Eine mathematische Definition der natürlichen Zahlen erfolgt zB mit Hilfe des Begriffs eines „Nachfolgers“ durch die Peano-Axiome (1889). Man muss die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{N}$ ebenso beweisen wie zB $1 \neq 2$.

In den natürlichen Zahlen gilt das sogenannte

Induktionsprinzip

Enthält $M \subset \mathbb{N}$ die 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger $n+1$, dann ist $M = \mathbb{N}$.

Dadurch werden rekursive Definitionen möglich, zB:

- $\sum_{i=1}^{0} a_i := 0,\ \sum_{i=1}^{1} a_i := a_1,\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.$
- Ähnlich $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}$ mit $\prod_{i=1}^{0} a_i = 1$.
- $a^0 := 1,\ a^1 := a,\ a^{n+1} := a^n \cdot a.$

Dezimaldarstellung mit den Ziffern $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$:

$\forall a \in \mathbb{N}$ ist $a = \sum_{i=0}^{m} a_i 10^i$, geschrieben $(a_m \ldots a_0)_{10} = a_m \ldots a_0$.

Aus dem Induktionsprinzip ergibt sich auch das oft genutzte

Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Die Aussage $A(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr, wenn man zeigen kann:

1. $A(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang).
2. Wenn $A(n)$ wahr ist, dann auch $A(n+1)$ (Induktionsschluss).

1.17 Beispiel

- Gauß als Schüler: $2\left(\sum_{i=1}^{100} i\right) = 10100 = 100 \cdot 101$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = n\,(n+1)$. Beweis: Induktion.

Neutrale Elemente und Inverse

Bezüglich der Verknüpfungen spielen zwei Elemente von $\mathbb{N}_0$ eine besondere Rolle:

- $0 + a = a \; \forall \; a \in \mathbb{N}_0$: 0 ist *neutrales Element der Addition*.
- $1 \cdot a = a \; \forall \; a \in \mathbb{N}$: 1 ist *neutrales Element der Multiplikation*.

Die neutralen Elemente können in $\mathbb{N}$ allerdings nicht als Ergebnis der jeweils zugehörigen Verknüpfung gewonnen werden:

- Zu $a \in \mathbb{N}$ gibt es keine Zahl $b \in \mathbb{N}$ so, dass $a + b = 0$ (außer wenn $a = 0$).
- Zu $a \in \mathbb{N}$ gibt es keine Zahl $b \in \mathbb{N}$ so, dass $a \cdot b = 1$ (außer wenn $a = 1$).

Diese fehlenden *Inversen* bzgl Addition bzw Multiplikation fügen wir den natürlichen Zahlen im folgenden hinzu.

Ganze Zahlen

- Das Inverse zu $a \in \mathbb{N}$ bzgl der Addition bezeichnen wir mit $(-a)$ („Negatives“), dh es gelte $a + (-a) = 0$.
- Motivation ist zB Begriff der Schulden.

Die Menge der ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-a \mid a \in \mathbb{N}\}$. Wir setzen die Verknüpfungen und Rechengesetze fort, wobei $(-a)\,(-b) := a\,b$.

1.18 Bemerkung

- Alle bisherigen Rechenregeln und Vereinbarungen bleiben gültig.
- $a + (-b) =: a - b$ („Differenz“).
- Minus mal Minus gibt Plus, $(-1)\,a = -a$.
- Für $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b - a$.

- Das Inverse zu $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bzgl der Multiplikation bezeichnen wir mit a^{-1} („Kehrwert“), dh es gelte $a^{-1} \cdot a = 1$.
- Motivation ist zB das Aufteilen von Gegenständen.

Die Menge der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q} := \{a \cdot b^{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Wir setzen die Verknüpfungen und Rechengesetze fort, wobei $a^{-1} + b^{-1} := (a+b) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$.

1.19 Bemerkung

- Alle bisherigen Rechenregeln und Vereinbarungen bleiben gültig.
- $a \cdot b^{-1} =: \frac{a}{b}$ („Quotient“ oder „Bruch“), $(a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n} =: a^{-n}$.
- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ („kürzen“ bzw „erweitern“) $\rightsquigarrow$ „gleichnamig machen“.
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.
- Für a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, gibt es genau ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $a\,x = b$, nämlich $x = \frac{b}{a}$.

Fortsetzung der Anordnung

Ordnung auf $\mathbb{Z}$:

- Für $a, b \in \mathbb{N}_0$ gelte: $-a < -b \iff a > b$.
- Insbesondere ist damit $-a < 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Ordnung auf $\mathbb{Q}$:

- Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gelte: $\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \iff a < c$.
- Um allgemeine Brüche zu vergleichen: Gleichnamig machen.

Damit hat die Ordnungsrelation „<“ folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: $a, b \in \mathbb{Q}$: genau eines aus $a < b$, $b < a$, $b = a$.
- Transitivität: $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a < b$, $b < c \Longrightarrow a < c$.
- Monotonie:
  - $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$.
  - $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$: $a < b \Longrightarrow a\,c < b\,c$.

Aus den Eigenschaften der Anordnung ergeben sich folgende

Rechenregeln für Ungleichungen

1. $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0.$
2. $0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$
3. $a < b \Longleftrightarrow a - b < 0 \Longleftrightarrow b - a > 0.$
4. $a < b,\ c < 0 \Longrightarrow a\,c > b\,c.$
5. $a^2 \geq 0.$
6. $0 < a < b\ ,\ 0 < c < d \Longrightarrow a\,c < b\,d.$
7. $a,\ b > 0,\ a^2 < b^2 \Longrightarrow a < b.$

Beweis $\boxed{1}$
Ann.: $\frac{1}{a} < 0.$
$\Rightarrow a\frac{1}{a} < 0.$
$\Rightarrow$ Widerspruch.

Beweis $\boxed{5}$
$a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0.$
$a < 0 \Rightarrow a \cdot a > 0.$

Beweis $\boxed{6}$
$c > 0 \Rightarrow ac < bc.$
$b > 0 \Rightarrow bc < bd.$
$\Rightarrow ac < bd.$

Analoge Aussagen gelten mit „$\leq$“ bzw „$\geq$“ anstelle von „$<$“ und „$>$“.

Ein schnelles Beispiel

- Problemstellung:
  - Ein Bauer hat einen $16m^2$ großen Schweinestall.
  - Eine Richtlinie gibt vor, dass pro Schwein mindestens $3m^2$ benötigt werden.
  - Wieviele Schweine darf der Bauer maximal in dem Stall halten?
- Mathematische Formulierung:
  - $x =$ Anzahl der Schweine.
  - Richtlinie sagt $3\,x \leq 16$.
- Lösung:

$$3\,x \leq 16 \Longleftrightarrow x \leq \frac{16}{3}.$$

- Antwort:

Der Bauer darf maximal 5 Schweine in dem Stall halten.

Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Jede rationale Zahl lässt sich im Dezimalsystem darstellen. Der resultierende Dezimalbruch ist entweder endlich oder periodisch:

- $q = \sum_{i=-M}^{m} q_i \cdot 10^i$.

$$\implies q \hat{=} q_m \dots q_0, q_{-1} \dots q_{-M}.$$

  $M =$ (endliche) Anzahl der Nachkommastellen.

- $q = \sum_{i=-N}^{m} q_i \cdot 10^i + \frac{10^k}{10^k - 1} \cdot 10^{-N} \cdot \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot 10^{-j} =$

$$= \sum_{i=-N}^{m} q_i \cdot 10^i + \frac{(p_1 \dots p_k)_{10}}{\underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ mal}} \underbrace{0 \dots 0}_{N \text{ mal}}}$$

$$\implies q \hat{=} q_m \dots q_0, q_{-1} \dots q_{-N} p_1 \dots p_k p_1 \dots p_k \dots$$

$$= q_m \dots q_0, q_{-1} \dots q_{-N} \overline{p_1 \dots p_k}.$$

  Unendlich viele Nachkommastellen.
  $N =$ Vorperiodenlänge, $k =$ Periodenlänge.

Beispiele für Dezimalbruchentwicklungen

- Jede ganze Zahl ist endlicher Dezimalbruch mit $M = 0$.
- $q = \frac{179}{8} = 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.
  $\Longrightarrow q = 22 + \frac{375}{1000} \Longrightarrow q \mathrel{\hat{=}} 22,375$.
- $q = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{10^1 - 1} \cdot 10^{-0} \cdot 3 = \frac{10^1}{10^1 - 1} \cdot 10^{-0} \cdot 3 \cdot 10^{-1}$.
  $\Longrightarrow q \mathrel{\hat{=}} 0,\overline{3}$.
- $q = \frac{7}{150} = \frac{42}{900} = \frac{4}{100} + \frac{6}{900} = 4 \cdot 10^{-2} + \frac{10^1}{10^1 - 1} \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-1}$.
  $\Longrightarrow q \mathrel{\hat{=}} 0,04\overline{6}$.
- $q = \frac{7}{165} = \frac{42}{990} = \frac{10^2}{10^2 - 1} \cdot 10^{-1} \cdot (4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2})$.
  $\Longrightarrow q \mathrel{\hat{=}} 0,0\overline{42}$.
- $q = \frac{443}{330} = 1 + \frac{339}{990} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{42}{990}$.
  $\Longrightarrow q \mathrel{\hat{=}} 1,3\overline{42}$.
- $q = \frac{2}{13} \mathrel{\hat{=}} 0,\overline{153846}$.

Existenz nicht-rationaler Zahlen

Pythagoras: Für die Länge x der Hypothenuse des gleichseitigen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 gilt $x^2 = 2$.

1.20 Proposition

x wie oben ist keine rationale Zahl.

Beweis

Angenommen $x \in \mathbb{Q}$. $\implies \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ so, dass $x = \frac{a}{b}$, wobei der Bruch vollständig gekürzt ist.
$\implies a^2 = 2\, b^2$. Man kann a^2 also durch 2 teilen. Daraus folgt, dass man auch a durch 2 teilen kann (warum?)
$\implies \exists\, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $a = 2\, r$. $\implies b^2 = 2\, r^2$. Damit kann man auch b^2 bzw b durch 2 teilen.
Wir haben gezeigt, dass man sowohl a als auch b durch 2 teilen und somit den ursprünglich Bruch kürzen kann. Das ist ein Widerspruch.

Näherung durch Schachtelung

Ist $x^2 = 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
1^2 &< x^2 < 2^2 \\
(1,4)^2 &< x^2 < (1,5)^2 \\
\vdots \quad &< \vdots < \quad \vdots \\
(1,4125)^2 &< x^2 < (1,425)^2 \\
(1,4125)^2 &< x^2 < (1,41875)^2
\end{aligned}$$

Hinweis

Zweite Zeile: Die Mitte zwischen $\frac{14}{10}$ und $\frac{15}{10}$ ist $\frac{1}{2}(\frac{14}{10} + \frac{15}{10}) = \frac{29}{20}$, und $(\frac{29}{20})^2 = \frac{841}{400} > 2 = x^2$. Einige Iterationsschritte führen zur nächsten Zeile.

Durch viele Wiederholungen ergibt sich $x \approx 1,414213562373$.
Die Zahl scheint ein unendlicher, nicht-periodischer Dezimalbruch zu sein, den man durch rationale Zahlen annähern kann.

Eine transzendente Zahl

- Die Fläche des Einheitskreises nennen wir π.
- Auch π ist keine rationale Zahl. π löst außerdem auch keine ganzzahlige Polynomgleichung, dh sie ist *transzendent*.
- Man kann zeigen: Jede transzendente Zahl ist nicht-rational.

Näherung für π durch ein- und umbeschriebene Vielecke:

$$\begin{array}{rcccl} 2 & < & \pi & < & 4 \\ \vdots & < & \vdots & < & \vdots \\ 3,1415924 & < & \pi & < & 3,1415932 \end{array}$$

Mehr Stellen via Umfang: 7 (Chongzhi ca. 480), 16 (al-Kashi 1424), 20 bzw 35 (Ludolph um 1600) $\rightsquigarrow$ „Ludolph'sche Zahl".

Genauster Wert ohne Computer (38 Stellen, Grienberger 1630):

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288419 7.$$

Reelle Zahlen

- Die Zahlen, die man durch unendliche Schachtelung von rationalen Zahlen gewinnen kann, nennt man *irrationale Zahlen*.
- Die irrationale Zahlen sind genau die unendlichen, nicht-periodischen Dezimalbrüche.
- Zwischen 2 rationalen liegen unendlich viele irrationale Zahlen.

Die Zusammenfassung aller rationaler und irrationaler Zahlen nennen wir *reelle Zahlen*

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{Irrationale Zahlen}\} = \{\text{Dezimalbrüche}\}\,.$$

- $\mathbb{R}$ enthält alle irgendwie „real“ vorkommenden Zahlen.
- $\mathbb{R}$ ist *vollständig*: Wir haben $\mathbb{Q}$ durch Hinzufügen aller Zahlen, die wir in $\mathbb{Q}$ annähern können, komplettiert.
- Veranschaulichung: Zahlengerade, wird lückenlos ausgefüllt.
- „$+$“, „$\cdot$“ und „$<$“ werden auf natürliche Weise fortgesetzt.

Zusammenfassung der Eigenschaften von $\mathbb{R}$

- „$+$“ ist assoziativ und kommutativ, es gibt ein neutrales Element 0 und additive Inverse für alle Elemente.
- „$\cdot$“ ist assoziativ und kommutativ, es gibt ein neutrales Element 1 und multiplikative Inverse für alle Elemente außer 0.
- „$+$“ und „$\cdot$“ sind distributiv.
- „$<$“ ist trichotom, transitiv und monoton bzgl „$+$“ und „$\cdot$“.
- Es herrscht Vollständigkeit.

Eine Menge, die all diese Eigenschaften besitzt, nennt man einen *vollständigen geordneten Körper*.

- Es gibt nur einen vollständigen geordneten Körper.
- Man hätte $\mathbb{R}$ dadurch also axiomatisch definieren können.

Alle bisherigen Vereinbarungen und Regeln bleiben gültig.

Intervalle

Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden Intervalle (ggf mit Randpunkten a, $b \in \mathbb{R}$) genannt:

- offene Intervalle:
  - $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
  - $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$. $\quad (-\infty, b)$ analog.
- abgeschlossene Intervalle:
  - $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
  - $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$. $\quad (-\infty, b]$ analog.
- Intervalle, die weder offen noch abgeschlossen sind:
  - $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
  - $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
- Intervalle, die offen und abgeschlossen sind:
  - $(-\infty, \infty) = [-\infty, \infty] = \mathbb{R}$.
  - $\emptyset$.

1. Grundlagen

1.V. Funktionen

1.21 Definition

Eine Abbildung zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt *Funktion*.

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist also eine Funktion, wenn es jedes $x \in D \subset \mathbb{R}$ auf genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ abbildet.
$\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ wird als Punktemenge im kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

- Die *Einschränkung* von f auf eine Menge $M \subset D$ ist $f|_M : M \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f|_M(x) := f(x)\ \forall\, x \in M$.
- Eine *Nullstelle* ist ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

Seien zwei Funktionen $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- $f \pm g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$.
- $f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.
- $\frac{f}{g} : D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$.

Erste Beispiele

- Pegelmessung des Rheins in Köln am 24.10.14:

Uhrzeit	0	4	8	12	16	20
Höhe in cm	288	291	295	299	304	310

Quelle: http://www.wetteronline.de

- $D_f = \{1, 2, \pi, 4\}$,

x	1	2	π	4
$f(x)$	2	4	2	-17

- $D_F := [0, 3] \cup \{4\}$. $F : D_F \longrightarrow \mathbb{R}$,

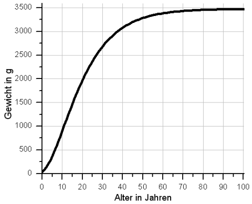
$$F(x) := \begin{cases} x^3 & \text{falls } x \in [0,2) \\ 1 & \text{falls } x = 2 \\ 8 & \text{falls } x \in (2,3] \\ -1 & \text{falls } x = 4. \end{cases}$$

$F(D_F) = [0, 8] \cup \{-1\}$.

- $c_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $c_1(x) := 1$. $c_1(\mathbb{R}) = \{1\}$. („Konstante Fkt“)

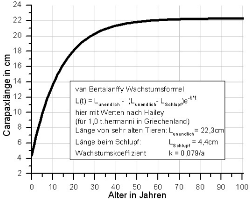
Beispiel: Schildkrötenwachstum

Alter $\rightarrow$ Gewicht



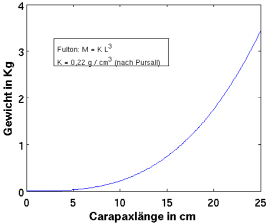
Bertalannfy Wachstumsgesetz:

Alter $\rightarrow$ Länge



Fulton'sches Gewichtsgesetz

Länge $\rightarrow$ Gewicht



Quelle http://www.testudolinks.de

Mehr Beispiele

- $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := x^2. \implies g(\mathbb{R}) = [0, \infty).$
- $G : [-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ G(x) := x^2. \implies G([-1, \infty)) = [0, \infty).$
  $G = g|_{[-1,\infty)}.$
- $h : [-4, 4] \longrightarrow (-17, 5),\ h(x) := x.$
  $h = \mathrm{id}_{[-4,4]}.$
- $H := h + c_1 : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R},\ H(x) = x + 1.$
  $\implies H([-4, 4]) = [-3, 5].$
- $\frac{G}{H} : (-1, 4] \longrightarrow \mathbb{R},\ (\frac{G}{H})(x) = \frac{x^2}{x+1}.$
  $\implies (\frac{G}{H})((-1, 4]) = [0, \infty).$
- $H \circ G|_{[-1,2]} : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R},\ (H \circ G|_{[-1,2]})(x) = x^2 + 1.$
  $\implies (H \circ G|_{[-1,2]})([-1, 2]) = [1, 5].$
- $G \circ H|_{[-2,4]} : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R},\ (G \circ H|_{[-2,4]})(x) = (x + 1)^2.$
  $(G \circ H|_{[-2,4]}) = [0, 25].$

Elementare Eigenschaften von Funktionen

Wir betrachten eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:

- f ist *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$.
  Graph ist symmetrisch zur y-Achse.
- f ist *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$.
  Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- f ist *periodisch mit Periode T*, wenn $\exists\, T > 0$, so dass $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in D$.
  Graph wiederholt sich.
- f ist *monotonon wachsend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
  Graph fällt nicht.
- f ist *monoton fallend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
  Graph steigt nicht.
- f ist *monoton*, wenn f monoton wächst oder monoton fällt.

Strenge Monotonie und Umkehrbarkeit

- f ist *streng monotonon wachsend*, wenn gilt:

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Graph steigt, trifft jede Parallele zur x-Achse höchstens einmal.

- f ist *streng monotonon fallend*, wenn gilt:

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Graph fällt, trifft jede Parallele zur x-Achse höchstens einmal.

1.22 Proposition

Ist eine Funktion f streng mononton, so ist sie injektiv.

$\operatorname{graph}(f^{-1}) = \{(y, x) \mid y \in f(D), f(x) = y\}$ ist die Spieglung von graph f an der Diagonalen des Koordinatensystems.

Die Betragsfunktion

1.23 Definition

Wir definieren den *Betrag*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und damit die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\cdot|(x) := |x|$.

Interpretation: $|x - y|$ ist der Abstand von x und y.

Eigenschaften

- $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dh $|\cdot|(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.
- $|x| = |-x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dh $|\cdot|$ ist gerade.
- $x \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $|x\,y| = |x|\,|y|$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$.
- $|x| \leq a \Longleftrightarrow x \in [-a, a]$.

Die Dreiecksungleichung

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist die Strecke:

1.24 Satz

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.
- $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis

$$|x - y| \leq \begin{cases} x - y & (\text{ falls } x - y \geq 0) \\ -x + y & (\text{ falls } x - y < 0) \end{cases} \begin{matrix} = |x| + |-y| \\ = |-x| + |y| \end{matrix}$$
$$= |x| + |y|.$$

$$|x| = |x - y + y| \leq |x + y| - |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x + y|$$
$$|y| = |y - x + x| \leq |y + x| + |x| \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y + x| = |x + y|$$
$$\Longrightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x + y|.$$

Die anderen Aussagen werden analog bewiesen.

Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten

Erinnerung

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}$ und $x^0 := 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.
Für n, $m \in \mathbb{Z}$ und x, y derart, dass alles folgende Sinn ergibt, gilt:

- $x^n x^m = x^{n+m}$,
- $(x^n)^m = x^{nm}$,
- $x^m y^m = (xy)^m$.

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Potenzfunktion wie folgt definiert:

- $n \geq 0$: $\quad p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$.
- $n < 0$: $\quad p_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_n(x) := x^n$.

Graph einer Potenzfunktion

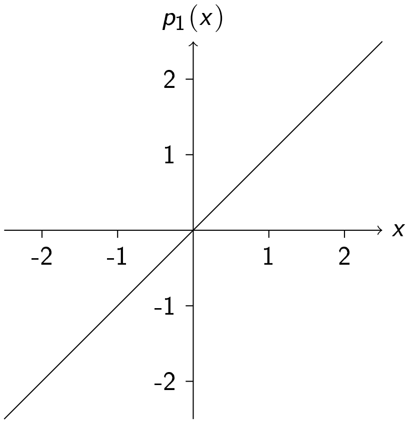


Abbildung: Die Funktion $p_1(x) = x$

Graph einiger Potenzfunktionen

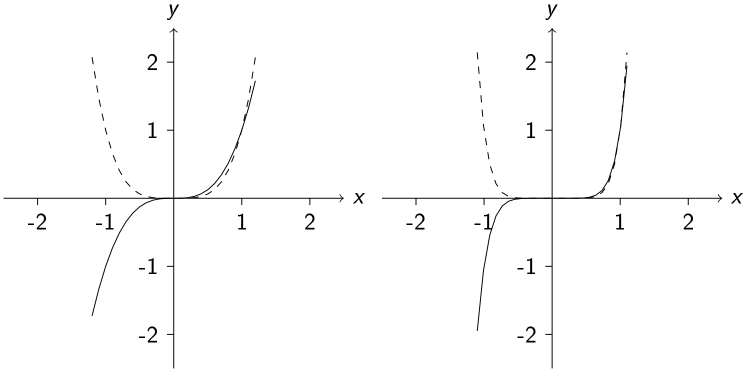


Abbildung: links p_3 und p_4 (gestrichelt), rechts p_7 und p_8 (gestrichelt)

Graph von p_{-1}

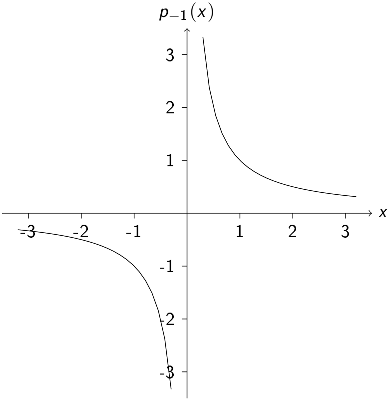


Abbildung: Graph von p_{-1} („Hyperbel")

Graph einer weiteren Potenzfunktion

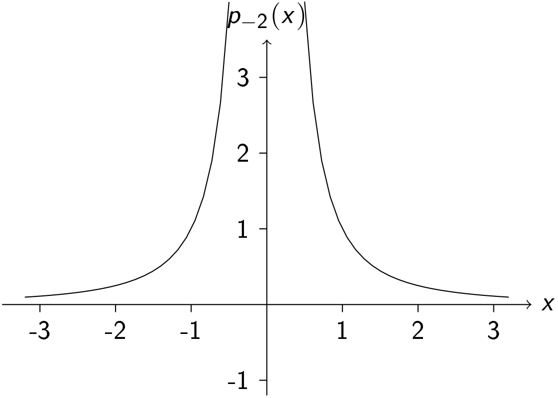


Abbildung: Die Potenzfunktion p_{-2}

Abbildungseigenschaften der Potenzfunktion

Für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

- Ist n ungerade, dann ist p_n ungerade.
- Ist n gerade, dann ist p_n gerade.

Ist $n = 0$, dann ist $p_n = p_0 = c_1$ die konstante 1-Funktion: monoton wachsend und fallend mit Bildmenge $\{1\}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

- n ungerade: p_n ist streng monoton wachsend mit $p_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- n gerade: $p_n(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.
  - $p_n|_{[0,\infty)}$ ist streng monoton wachsend mit Bildmenge $[0, \infty)$.
  - $p_n|_{(-\infty,0]}$ ist streng monoton fallend mit Bildmenge $[0, \infty)$.

Es gibt also Unterschiede bei der Bild- und der Monotoniemenge.

Umkehrfunktion der Potenzfunktion

$n \in \mathbb{N}$ ungerade

p_n ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$p_n^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y \text{ so, dass } y^n = x.$$

Wir schreiben sinnvollerweise $p_n^{-1}(x) := x^{\frac{1}{n}}$ und auch $p_n^{-1}(x) := \sqrt[n]{x}$.

$n \in \mathbb{N}$ gerade

Sowohl $p_n|_{(-\infty,0]}$ also auch $p_n|_{[0,\infty)}$ sind umkehrbar auf $[0,\infty)$ mit

$$(p_n|_{(-\infty,0]})^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow (-\infty,0],\ x \mapsto y \text{ so, dass } y^n = x.$$

$$(p_n|_{[0,\infty)})^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ x \mapsto y \text{ so, dass } y^n = x.$$

Nur für den positiven Zweig obige Schreibweise: $\sqrt[2r]{x^{2r}} = |x|$.

Für $n = 2$ schreiben wir $\sqrt[2]{x} =: \sqrt{x}$.

Wurzeln mit geradem Exponent

Merke

- Man kann keine geraden Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen.
- Eine Wurzel mit geradem Exponenten ist nie negativ.
- Vorsicht beim Umformen von Gleichungen!

1.25 Beispiel

Wir suchen $x \in \mathbb{R}$ so dass gilt: $2 - x = \sqrt{x}$.

- Quadrieren führt zu $4 - 4x + x^2 = x$.
- $x = 4$ löst die letzte Gleichung.
- Es gilt aber $2 - 4 = -2 \neq 2 = \sqrt{4}$.

Warum?

$\rightsquigarrow$ Scheinlösungen ausschließen und immer Probe machen!

Anwendungsbeispiel

Frage

Wie groß ist der Radius eines kugelförmigen Körpers mit einem Fassungsvermögen von 8000 Litern?

Antwort

8000 Liter $= 8m^3$.
Formel für das Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$$
\begin{aligned}
& V = 8 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \\
\iff \quad & r^3 = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{\pi} \cdot 8 \\
\iff \quad & r = \left(\tfrac{3}{4\pi} \cdot 8\right)^{\frac{1}{3}} \\
\iff \quad & r = 2\left(\tfrac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

Der Radius ist also ganz ungefähr $1,25m$.

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Sei $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vollständig gekürzt.
Die Potenzfunktionen sind dann definiert durch

$$p_q(x) := p_m \circ p_{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m := x^{\frac{m}{n}}$$

für folgende x:

- $q > 0$:
  - n gerade: $x \in [0, \infty)$.
  - n ungerade: $x \in \mathbb{R}$.
- $q < 0$:
  - n gerade: $x \in (0, \infty)$.
  - n ungerade: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $q = 0$: $x \in \mathbb{R}$.

Es gelten die üblichen Potenzrechenregeln.

Polynome

1.26 Definition

Ein *Polynom* vom *Grad* $N \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j\, x^j$, mit *Koeffizienten* $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ und $a_N \neq 0$.

Spezielle Polynome

- $N = 0$: Konstante Funktion.
- $N = 1$: Affin-lineare Funktion.
- $N = 2$: Quadratische Funktion.

Polynome können zum Beispiel bei der *Interpolation* nützlich sein:

1.27 Proposition

Für $N+1$ Punktepaare $(x_0, y_0), \ldots (x_N, y_N)$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ $\exists$ ein Polynom f mit Grad N, so dass $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \ldots N$.

Nullstellen von Polynomen

- $x_0 \in \mathbb{R}$ Nst eines Polynoms $f \iff \exists$ Polynom g mit $f = (x - x_0)\, g$, dh f enthält Linearfaktor $(x - x_0)$.
- Wenn x_0 wieder Nst von g ist, wird es doppelte Nst von f genannt, etc. $\rightsquigarrow$ *Vielfachheit*.

1.28 Beispiel

- $f(x) = (x-1)(x-5)(x+2) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$
- $f(x) = (x-1)^2(x+2) = x^3 - 3x + 3.$
- $f(x) = (x^2+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$

Fundamentalsatz der Algebra:

1.29 Satz

Ein Polynom vom Grad $N > 0$ hat höchstens N Nst (Vielfachheiten mitgezählt).

1.30 Proposition

Sind $x_1, \dots x_M$ die Nst des Polynoms f mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_M$, dann gilt $f(x) = h(x) \prod_{i=1}^{M} (x - x_i)^{k_i}$ für ein Polynom h ohne Nst.

Man kann zeigen: h ist konstant oder besteht aus Potenzen quadratischer Polynome.

Kennt man eine Nst (zB durch Raten), so kann man die Faktorisierung mit Polynomdivision berechnen.

1.31 Proposition

Zu Polynomen f und $g \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome h und r mit $grad(r) < grad(g)$ und $f(x) = h(x)\, g(x) + r(x)$.

1.32 Beispiel

$(x^5 - 2\,x^4 + x - 2) : (x - 2) = x^4 + 1$ mit $r(x) = 0$.

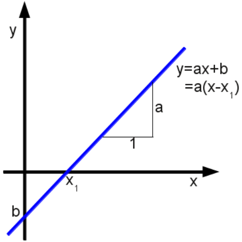
Beispielrechnung Polynomdividsion

$$
\begin{array}{l}
(x^4 \ +3x^3 \ -5x^2 \ +3x \ -5) : (2x+1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{8}x + \frac{49}{16} - \frac{129}{32x+16} \\
\underline{-(x^4 + \frac{1}{2}x^3)} \\
\qquad \frac{5}{2}x^3 - 5x^2 \\
\qquad \underline{-(\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2)} \\
\qquad\qquad -\frac{25}{4}x^2 + 3x \\
\qquad\qquad \underline{-(-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{8}x)} \\
\qquad\qquad\qquad \frac{49}{8}x - 5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(\frac{49}{8}x + \frac{49}{16})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{129}{16}
\end{array}
$$

Affin-Lineare Funktionen

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := a\,x + b$, eine *affin-lineare Funktion*.
Ist $b = 0$ spricht man auch nur von einer *linearen Funktion*.

Der Graph von f ist eine Gerade.
a ist die Steigung von f.
b ist der y-Achsen-Abschnitt von f.



Bemerkung

Es gibt genau eine Nullstelle, nämlich $x_1 = -\frac{b}{a}$. Die Zerlegung in Linearfaktoren ergibt sich also sofort zu $f(x) = a\,x + b = a\,(x - x_1)$.

Quadratische Funktionen

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$ eine *quadratische Funktion*.

Der Graph von f ist eine Parabel:

- $a > 0$: Öffnung nach oben.
- $a < 0$: Öffnung nach unten.

Scheitelform durch quadratische Ergänzung:

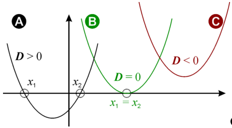
$$\begin{aligned} f(x) &= a\,(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}) \\ &= a\,(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}) \\ &= a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\,(x - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ *Scheitelpunk* $S = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$.

Diskriminante $d := b^2 - 4\,a\,c$.

Nullstellen quadratischer Funktionen

Die Diskriminante bestimmt die Anzahl der Nullstellen:



Quelle: Wikipedia

- $d < 0$: keine Nullstelle.
- $d = 0$: eine Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $d > 0$: zwei Nullstellen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$.

Die Formel gilt auch für $d = 0$: Dann ist $x_0 = x_1 = x_2$.

Mit $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ ist das die berühmte p-q-Formel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Bemerkung

Ist $d \geq 0$, dann ist $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ die Linearfaktorzerlegung von f.

Parabeln

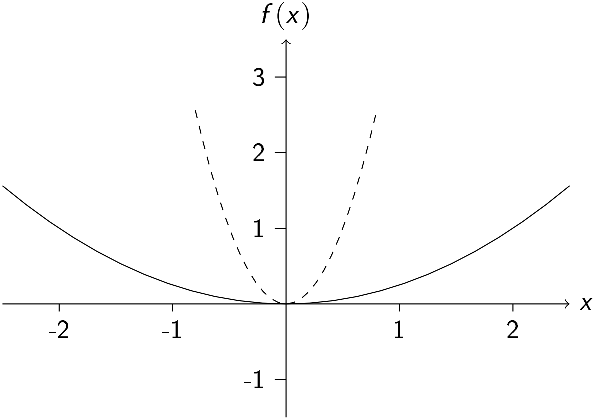


Abbildung: Die Parabeln zu $\frac{1}{4}x^2$ (schwarz) und $4x^2$ (gestrichelt)

Mehr Parabeln

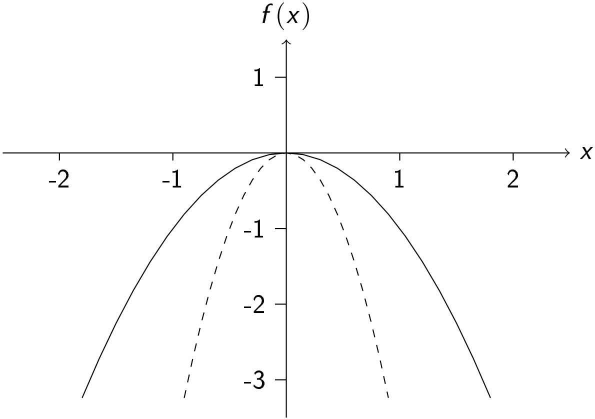


Abbildung: Die Parabeln zu $-x^2$ (schwarz) und $-4x^2$ (gestrichelt)

Eine Parabel

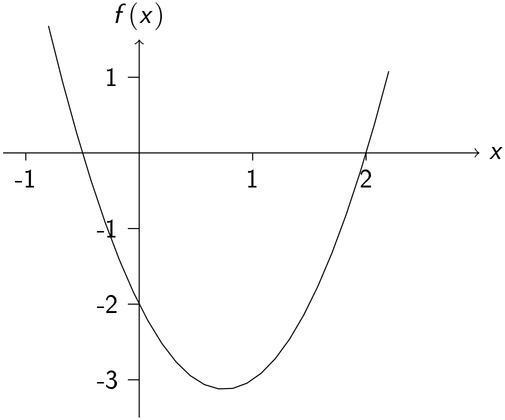
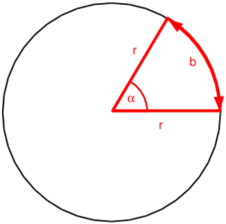


Abbildung: Der Graph von $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Winkel im Bogenmaß

Konvention: Positive Winkel werden gegen den Uhrzeigersinn abgetragen.

Eine Ameise läuft auf einem Kreisbogen mit Radius r, wobei von der Verbindungsstrecke zum Mittelpunkt der Winkelbereich $[0, \alpha]$ überstrichen wird. Welche Wegstrecke b hat sie zurückgelegt?



- Falls $\alpha = 360°$: $b = 2\,\pi\,r$. (Umfang eines Kreises mit Radius r.)
- Falls α beliebig: $b = 2\,\pi\,\frac{\alpha}{360°}\,r$. ($b$ ist proportional zu α.)

1.33 Definition

Wir identifizieren Winkel mit ihrem gerichteten Bogenmaß, dh der vorzeichenbelegten Länge des zugehörenden Bogens am Einheitskreis.

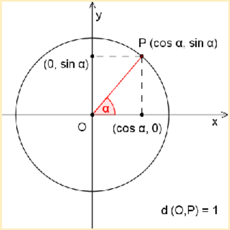
Alle Winkel sind ab jetzt im Bogenmaß zu verstehen.

Die Kreisfunktionen Sinus und Cosinus

1.34 Definition

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$\sin(z) :=$ y-Koordinate des Einheitskreisbogenendpunktes zum Winkel z.

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$\cos(z) :=$ x-Koordinate des Einheitskreisbogenendpunktes zum Winkel z.



Abbildungseigenschaften

- $\sin(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
- sin ist ungerade, cos ist gerade.
- sin und cos sind $2\,\pi$-periodisch.
- sin und cos besitzen unendlich viele Nullstellen:
  - $\sin(z) = 0 \iff z = k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Kreisfunktionen und Dreiecke

Mit dem Satz von Pythagoras ist aus der Definition unmittelbar klar:

1.35 Satz

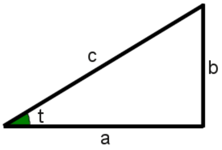
Für alle $z \in \mathbb{R}$ ist $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

Beachte: Wir schreiben $\sin^2(z) := (\sin(z))^2$ etc.

Mittels Dreiecksähnlichkeiten sieht man:

$$c \sin(z) = b$$

$$c \cos(z) = a$$

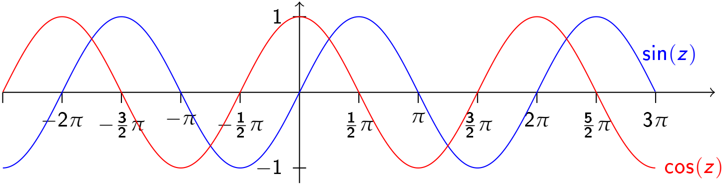


Es gilt also:

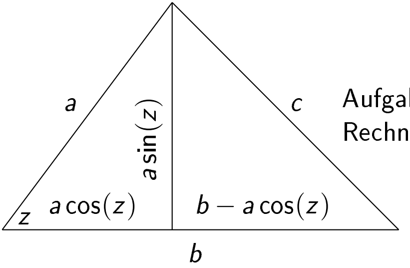
- $\cos = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$.
- $\sin = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$.

Wertetabelle und Graph

z	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(z)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(z)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Es gilt: $\sin(z) = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ bzw $\cos(z) = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.



Aufgabe:
Rechne c aus a, b und z aus.

$$\begin{aligned} c^2 &= (b-a\cos(z))^2 + (a\sin(z))^2 \\ &= b^2 - 2\,a\,b\cos(z) + a^2\cos^2(z) + a^2\sin^2(z) \end{aligned}$$

1.36 Satz

Für ein Dreieck mit Seiten a, b und c, und dem von a und b eingeschlossenen Winkel z gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(z).$$

Additionstheoreme

1.37 Satz

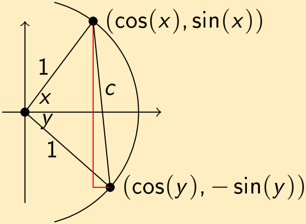
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

und

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Beweis



Pythagoras:

$$\begin{aligned} c^2 &= (\cos(x) - \cos(y))^2 + (\sin(x) + \sin(y))^2 \\ &= \cos^2(x) - 2\cos(x)\cos(y) + \cos^2(y) \\ &\qquad + \sin^2(x) + 2\sin(x)\sin(y) + \sin^2(y) \\ &= 2 - 2\cos(x)\cos(y) + 2\sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Cosinussatz:

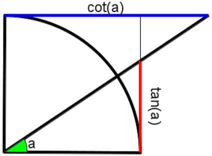
$$c^2 = 1 + 1 - 2\cos(x+y)$$

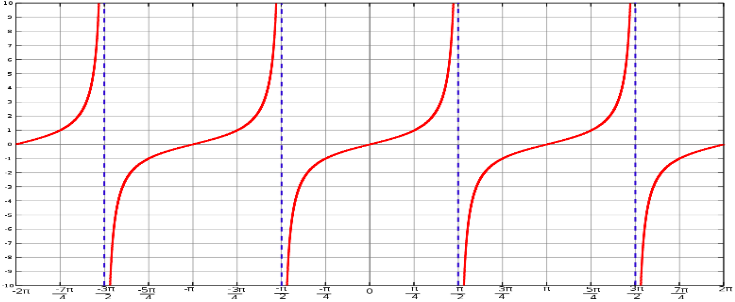
Für das andere Additionstheorem verwende $\sin(x+y) = \cos(x+y-\frac{\pi}{2})$.

1.38 Definition

$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}, \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$

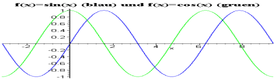
- tan ist ungerade.
- tan ist π-periodisch.
- $\tan(D_{\tan}) = \mathbb{R}$.
- $\tan(z) =$ Steigung zu z.



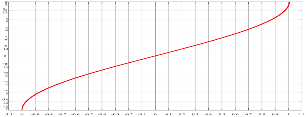


Arkusfunktionen

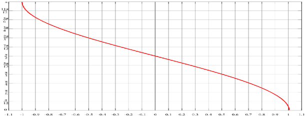
Bei den Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen muss man sich wieder für einen Zweig entscheiden.



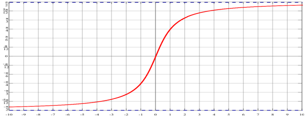
- $\sin^{-1} =: \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



- $\cos^{-1} =: \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$



- $\tan^{-1} =: \arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



2. Vektorgeometrie

2.I. Analytische Geometrie in der Ebene

Vektoren im $\mathbb{R}^2$

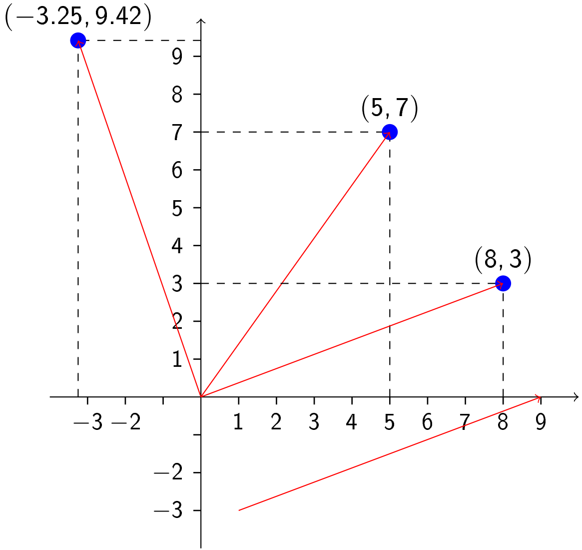
$x \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ ist interpretierbar:

- Als Ortskoordinatenpaar eines Punktes X in 2d.
- Als Koordinatenpaar einer gerichteten Strecke $\vec{x}$ in 2d: Gehe x_1 nach rechts und x_2 nach oben.

Solch eine gerichtete Strecken nennt man *Vektor*, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

- Ein Vektor hat eine Länge und eine Richtung, aber keine Lage.
- Jeder Punkt X hat einen *Ortsvektor* $\overrightarrow{OX}$ – die gerichtete Strecke vom Ursprung O zum Punkt X –, der derjenige Repräsentant des Vektors $\vec{x}$ ist, dessen Anfangspunkt in O liegt.
- Jeder Vektor $\vec{x}$ hat einen Repräsentanten, dessen Anfangspunkt in O liegt und der daher Ortsvektor eines Punktes X ist.

Darstellung in der Ebene



Addition von Vektoren

2.1 Definition

Für $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ ist $\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.

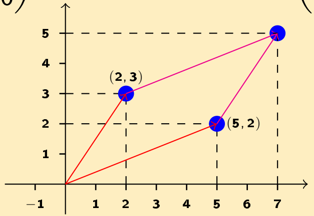
Merke

Dieses „+“ $\neq$ dem bei Zahlen, aber auch assoziativ und kommutativ.

2.2 Beispiel

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. $\vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} \; \forall \, \vec{x} \rightsquigarrow$ Neutrales $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{0}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$:



Vielfaches von Vektoren

2.3 Definition

Für $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist $a\,\vec{x} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \end{pmatrix}$.

Damit haben wir wieder $a\,\vec{x} = \underbrace{\vec{x} + \ldots + \vec{x}}_{a \text{ mal}}$ für $a \in \mathbb{N}$.

2.4 Proposition

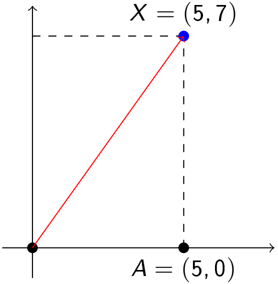
Für alle a, $b \in \mathbb{R}$ und $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- $1\,\vec{x} = \vec{x}$ (Neutrales).
- $a\,\vec{x} = \vec{x}\,a$.
- $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$.
- $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = a\,\vec{x} + a\,\vec{y}$ und $(a + b)\,\vec{x} = a\,\vec{x} + b\,\vec{x}$.

- Umgedrehter Vektor $(-1)\,\vec{x} =: -\vec{x}$; $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \rightsquigarrow$ Inverse.
- $\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-\vec{y})$. Vektor von X zu Y ist $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x}$.

Länge von Vektoren

Entfernung des Punktes $X = (5, 7)$ vom Ursprung?



Pythagoras:

$$\begin{aligned} d(X, 0) &= |\overline{OX}| \\ &= \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{AX}|^2} \\ &= \sqrt{74}. \end{aligned}$$

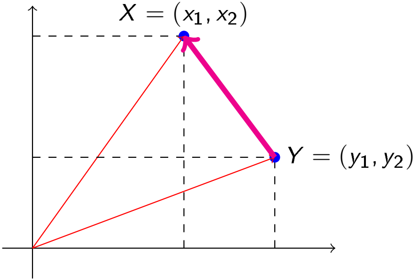
2.5 Definition

Die Länge von $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist $|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Es gilt:

- $|a\,\vec{x}| = |a||\vec{x}|$.
- $|\vec{x}| \geq 0$, und $|\vec{x}| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.
- Die Dreiecksungleichung $\big|\,|\vec{x}| - |\vec{y}|\,\big| \leq |\vec{x} \pm \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Abstand von Punkten



2.6 Proposition

Der Abstand von $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ ist

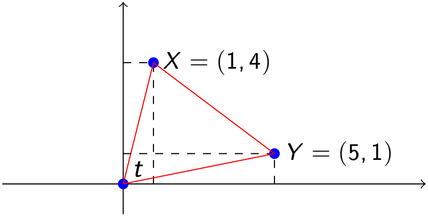
$$d(X, Y) = |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

2.7 Beispiel

$d((5,7),(8,3)) = 5.$

Winkel

Unter welchem Winkel sieht ein Beobachter im Ursprung die Punkte $X = (1,4)$ und $Y = (5,1)$?



Cosinussatz:
$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}|\,|\vec{y}|\,\cos(\angle(\vec{x},\vec{y}))$.

$$\Longrightarrow t = \arccos\left(\frac{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}{2|\vec{y}||\vec{x}|}\right) = \arccos\left(\frac{17+26-25}{2\sqrt{17}\sqrt{26}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{17}\sqrt{26}}\right).$$

2.8 Bemerkung

Man sieht, dass $\frac{1}{2}(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2$.

2.9 Definition

Für $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ ist das *Skalarprodukt* $\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1\, y_1 + x_2\, y_2$.

2.10 Proposition

Es gilt $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\, |\vec{y}| \cos(\angle(\vec{x}, \vec{y}))$ für alle $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

Insbesondere: Ist der Winkel $\frac{\pi}{2}$ (dh 90°), dann ist $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

2.11 Definition

$\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen orthogonal, wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

2.12 Proposition

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|\, |\vec{y}|$ für alle $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$.

Eigenschaften des Skalarproduktes

Direkt aus den Definitionen sieht man, dass $\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = |\vec{x}|$.

2.13 Proposition

Für $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2 \geq 0$, und $\vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ (*positiv definit*).
- $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$ (*symmetrisch*).
- $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot\vec{z} + \vec{y}\cdot\vec{z}$ und $(a\,\vec{x})\cdot\vec{y} = a\,(\vec{x}\cdot\vec{y})$ (*linear* in der ersten Komponente).

- Damit ist $\cdot$ auch linear in der zweiten Komponente.
- Wir haben also eine positiv definite, symmetrische, bilineare Abbildung $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Geraden in der Ebene

Eine Gerade g ist durch einen Punkt Y und einen Richtungsvektor $\vec{r} \neq \vec{0}$ gegeben:

$$g = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \vec{y} + a\,\vec{r} \text{ für } a \in \mathbb{R} \right\} \;\; (\textit{Parameterform}).$$

Auch zwei Punkte Y und Z legen eine Gerade fest $\rightsquigarrow \vec{r} = \vec{y} - \vec{z}$.

2.14 Proposition

Zu g gibt es ein $d \in \mathbb{R}$ und ein $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{n}| = 1$ so, dass

$$g = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d \right\} \;\; (\textit{Normalenform}).$$

- Name daher, dass $\vec{n}$ orthogonal zur Richtung der Geraden.
- Mögliche Umrechnungsformeln: $\vec{n} = |\vec{r}|^{-1} \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$ und $d = \vec{y} \cdot \vec{n}$.
- Umgekehrt gilt: Jede Menge in Normalenform stellt Gerade dar.

Geraden als Funktionsgraph

2.15 Proposition

Ist g nicht parallel zur x_2-Achse, so gibt es eine affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{graph} f = g$, nämlich $f(x_1) = -\frac{n_1}{n_2} x_1 + \frac{d}{n_2}$.

Beweis

Sei g in Normalenform gegeben. Dann ist $n_2 \neq 0$. Es gilt:
$x \in g \iff x_1 n_1 + x_2 n_2 = d \iff x_2 = -\frac{n_1}{n_2} x_1 + \frac{d}{n_2} =: f(x_1)$.

2.16 Proposition

Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine affin-linearen Funktion mit $f(x_1) = a\, x_1 + b$ so ist $\operatorname{graph} f$ eine Gerade mit $d = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}$.

Beweis

$|\vec{n}| = 1$, sowie $-a = \frac{n_1}{n_2}$ und $b = \frac{d}{n_2}$. Also $x \in \operatorname{graph} f \iff \vec{x} \cdot \vec{n} = d$.

Geraden; Punkt und Gerade

Für die Lage zweier verschiedener Geraden in der Ebene existieren genau zwei sich ausschließende Möglichkeiten:

- Parallel. Gilt, wenn die Richtungen gleich sind (dh $\vec{r}_1$ ist Vielfaches von $\vec{r}_2$) bzw wenn die Normalenrichtungen gleich sind (dh $\vec{n}_1$ ist Vielfaches von $\vec{n}_2$).
- Sie haben genau einen Schnittpunkt.

Für den Abstand eines Punktes Z von einer Geraden g gilt:

2.17 Proposition

$d(Z,g) = |d - \vec{z} \cdot \vec{n}|.$

Beweis

Dreiecksungleichung $\Longrightarrow$ Lotfußpunkt Z_0 ist der Punkt auf g, der am nächsten an Z liegt.
Lotgerade durch Z ist $l = \{\vec{z} + a\,\vec{n} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Z_0 sei gegeben für $a = a_0$. $\Longrightarrow d(Z,g) = |\vec{z} - \vec{z}_0| = |a_0|$.
Aber auch $Z_0 \in g$. $\Longrightarrow d = (\vec{z} + a_0\,\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{z} \cdot \vec{n} + a_0$.

2. Vektorgeometrie

2.II. Analytische Geometrie im Raum

Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Wie beim $\mathbb{R}^2$ kann man die Elemente

$$x \in \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$

als Punkte X und Vektoren $\vec{x}$ auffassen.

Alle Definitionen übertragen sich analog:

- $\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$.
- $a\,\vec{x} := \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ a\,x_2 \\ a\,x_3 \end{pmatrix}$.
- $|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
- $\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3$.

Alle Schreibweisen und Aussagen übertragen sich analog.

Beispiel

Wir wollen ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 1m auf einen quadratischen Tierkäfig mit Kantenlänge 2m errichten.
Wie müssen die vier dreieckigen Dachseiten zugeschnitten werden?

Wir legen das Dach so in das Koordinatensystem, dass die Grundfläche die Eckpunkte $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$ und $D = (1, -1, 0)$ hat. Die Dachspitze ist dann in $S = (0, 0, 1)$.
Wir betrachten das Dreieck ABS.
Kantenlängen: $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$; $|\vec{a} - \vec{s}| = \sqrt{3} = |\vec{b} - \vec{s}|$.
Seien α, β, σ die Winkel in A, B, S. Dann gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(\vec{s} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{s} - \vec{a}|\,|\vec{b} - \vec{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\sigma = \arccos\left(\frac{(\vec{a} - \vec{s}) \cdot (\vec{b} - \vec{s})}{|\vec{a} - \vec{s}|\,|\vec{b} - \vec{s}|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right).$$

Geraden im Raum

- Wie in der Ebene sind Geraden gegeben durch einen Punkt Y und einen Richtungsvektor $\vec{r} \neq \vec{0}$, dh in Parameterform

$$g = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{y} + a\,\vec{r} \text{ für } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Anders als in der Ebene gibt es keine Normalenform von Geraden.
- Zwei verschiedene Geraden im Raum müssen nicht parallel sein, auch wenn sie keine gemeinsamen Punkte haben. Nicht-parallele Geraden ohne gemeinsame Punkte heißen *windschief*.

  Prüf-Rezept:
  - Sind die Richtungen gleich, dh gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a\,\vec{r}_1 = \vec{r}_2$? Wenn ja: Geraden parallel. Wenn nein: Weiter.
  - Ann. $\exists$ SP, dh $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{y}_1 + a_1\,\vec{r}_1 = \vec{y}_2 + a_2\,\vec{r}_2$. Berechnung von a_1 und a_2 aus zwei dieser drei Gleichungen.
  - Widerspruch beim Einsetzen in die dritte Gleichung? Wenn ja: windschief. Wenn nein: Geraden schneiden sich.

Ebenen

Eine Ebene E ist durch einen Punkt Y und zwei Richtungsvektoren $\vec{r} \neq \vec{0}$, $\vec{s} \neq \vec{0}$, die nicht Vielfache voneinander sind, gegeben als

$$E = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{y} + a\,\vec{r} + b\,\vec{s} \text{ für } a,\, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ (Parameterform).}$$

Drei Punkte Y, V, W nicht auf einer Linie $\rightsquigarrow$ $\vec{r} = \vec{v} - \vec{y}$, $\vec{s} = \vec{w} - \vec{y}$.

2.18 Proposition

Zu E gibt es ein $d \in \mathbb{R}$ und ein $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{n}| = 1$ so, dass

$$E = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d \right\} \text{ (Normalenform).}$$

- $\vec{n}$ steht auf allen Richtungen in E senkrecht.
- Man kann sich einen auf $\vec{r}$ und $\vec{s}$ senkrecht stehenden Vektor beschaffen und diesen zu $\vec{n}$ normieren, zB mit Hilfe eines Punktes $Z \notin E$. Dann ist $d = \vec{y} \cdot \vec{n}$.
- Umgekehrt gilt: Jede Mengen in Normalenform stellt Ebene dar.

2.19 Beispiel

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Suche $\vec{n}$ so, dass $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, dh:
$n_1 + 2\, n_2 + 2\, n_3 = 0$ und $-2\, n_1 + 3\, n_2 + 3\, n_3 = 0$.

Offenbar erfüllt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beide Gleichungen. Seine Länge ist $\sqrt{2}$.

Es ergibt sich $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $d = \vec{y} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\Longrightarrow E = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d \right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid -x_2 + x_3 = 1 \right\}.$$

2.20 Beispiel

Seien $Y = O$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann gilt $X \in E \iff x_3 = 0$.
(Die eine Richtung sieht man mit $a = \frac{x_2+x_1}{2}$ und $b = \frac{x_2-x_1}{2}$.)

Ist $P = (3, 5, 0) \in E$? JA. ($a - b = 3,\ a + b = 5 \implies b = 1,\ a = 4$.)

Ist $Z = (2, 4, 6) \in E$? NEIN. ($6 \neq 0$.)

Finde $Z_0 \in E$ so, dass $\vec{z}_0 - \vec{z}$ senkrecht zu $\vec{r}$ und $\vec{s}$.
Dh $a_0,\ b_0 \in \mathbb{R}$: $(\vec{z} - a_0\,\vec{r} - b_0\,\vec{s}) \cdot \vec{r} = 0,\ (\vec{z} - a_0\,\vec{r} - b_0\,\vec{s}) \cdot \vec{s} = 0$.
Dh: $(2 - a_0 + b_0) + (4 - a_0 - b_0) = 0,\ -(2 - a_0 + b_0) + (4 - a_0 - b_0) = 0$.

$\implies a_0 = 3,\ b_0 = 1$ und $Z_0 = (2, 4, 0)$.

$\implies E = \{x_3 = 0\}$ – vergleiche oben! Das ist die x_1-x_2-Ebene.

Abstand Punkt zu Ebene

Analog zum Abstand Punkt zu Geraden in $\mathbb{R}^2$ ergibt sich:

2.21 Proposition

Ist Z ein Punkt und E eine Ebene, dann ist $d(Z,E) = |d - \vec{z} \cdot \vec{n}|$.

Beweis

Ist $Z_0 \in E$ der Fußpunkt des Lotes durch Z, dann gilt:
$|\vec{x} - \vec{z}|^2 \geq |\vec{z}_0 - \vec{z}|^2$ für alle $X \in E$.

Beweis:

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{z}|^2 &= (\vec{x} - \vec{z} + \vec{z}_0 - \vec{z}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{z} + \vec{z}_0 - \vec{z}_0) \\ &= |\vec{x} - \vec{z}_0|^2 + |\vec{z}_0 - \vec{z}|^2 + 2\,(\vec{x} - \vec{z}_0) \cdot (\vec{z}_0 - \vec{z}) \\ &\geq |\vec{z}_0 - \vec{z}|^2, \end{aligned}$$

da $\vec{x} - \vec{z}_0$ eine Richtung in E ist und $\vec{z}_0 - \vec{z}$ ein Vielfaches von $\vec{n}$.

$$\Longrightarrow d(Z,E) = |\vec{z}_0 - \vec{z}| = |(\vec{z}_0 - \vec{z}) \cdot \vec{n}| = |d - \vec{z} \cdot \vec{n}|.$$

Abstand in vorherigen Beispielen

2.22 Beispiel

Sei $Z = (1, 1, 5)$ und E die Ebene aus Beispiel 2.19.
Man berechnet $\vec{z} \cdot \vec{n} = -\frac{4}{\sqrt{2}}$. Damit ist $d(Z, E) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

2.23 Beispiel

Sei $Z = (1, 1, 2)$ und E die Ebene aus Beispiel 2.19.
Man berechnet $\vec{z} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ist $d(Z, E) = 0$.
Tatsächlich ist $Z \in E$ laut Normalendarstellung. In Parameterdarstellung: $a = -\frac{2}{7}$ und $b = -\frac{1}{7}$.

2.24 Beispiel

Seien Z und E aus Beispiel 2.20.
Da wir $Z_0 = (2, 4, 0)$ berechnet haben, ist $d(Z, E) = |\vec{z}_0 - \vec{z}| = 6$.
In die Formel eingesetzt ergibt sich $|0 - (-6)| = 6$.
Auch anschaulich klar: $Z = (2, 4, 6)$ liegt 6 über der x_1-x_2-Ebene.

2. Vektorgeometrie

2.III. Analytische Geometrie in n Dimensionen

Der $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Alle Element als Punkt oder Vektor auffassbar.

Analoge Definitionen:

- $\vec{x} + \vec{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ (Innere Verknüpfung).
- $a\,\vec{x} = \begin{pmatrix} a\,x_1 \\ \vdots \\ a\,x_n \end{pmatrix}$ (Äußere Verknüpfung).
- $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (Länge).
- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$ (Skalarprodukt).
- Orthogonal, wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Aussagen in $\mathbb{R}^n$

- Innere Verknüpfung:
  Assoziativ, kommutativ, hat 0, hat Inverse.
- Äußere Verknüpfung:
  Assoziativ, kommutativ, hat 1.
- Inner und äußere Verknüpfung:
  Erfüllen beide Distributivgesetze.
- Länge:
  homogen, positiv definit, erfüllt die Dreiecksungleichung.
- Skalarprodukt:
  symmetrisch, positiv definit, bilinear.
- Es gilt $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.
- Es gilt $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos(\angle(\vec{x}, \vec{y}))$ und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
- Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|$.

Ebenen im $\mathbb{R}^n$

- Eine k-Ebene im $\mathbb{R}^n$ durch Y ist für $k \leq n-1$ gegeben durch

$$E_k = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{y} + \sum_{j=1}^{k} a_j \vec{r}_j \text{ für } a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

  mit Richtungsvektoren $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ nicht in einer $(k-1)$-Ebene.
- Jede $(n-1)$-Ebene E_{n-1} im $\mathbb{R}^n$ hat eine Normalendarstellung

$$E_{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{n} = d\}$$

  für $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\vec{n}| = 1$ orthogonal auf allen Richtungen in der Ebene und $d = \vec{n} \cdot \vec{y}$.
- Zwei verschiedene $(n-1)$-Ebenen sind entweder parallel oder schneiden sich in einer $(n-2)$-Ebene.
- Zwei verschiedene $(n-2)$-Ebenen sind entweder parallel oder schneiden sich in einer $(n-3)$-Ebene oder sind windschief.
- Für $Z \in \mathbb{R}^n$ ist $d(Z, E_{n-1}) = |d - \vec{z} \cdot \vec{n}|$.

2.25 Beispiel

Wir betrachten $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Winkel zwischen diesen Vektoren sind nicht Null
$\Longrightarrow$ verschiedene „Richtungen“.

Andererseits: $-\frac{2}{5}\,\vec{r}_1 + \frac{3}{5}\,\vec{r}_2 = \vec{r}_3 \Longrightarrow$ alle in der selben 2-Ebene in $\mathbb{R}^4$.

Es handelt sich also nicht um verschiedene „Raumrichtungen“
$\Longrightarrow$ können keine 3-Ebene im $\mathbb{R}^4$ definieren.

Demgegenüber: $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ schon.

2.26 Beispiel

Winkel zwischen $\vec{x}$, $\vec{y}$ für $X = (1, 3, 0, 2, 1)$, $Y = (1, 0, 2, 2, 2)$ in $\mathbb{R}^4$.

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 + 0 + 0 + 4 + 2 = 7$.

$|\vec{x}| = \sqrt{1 + 9 + 0 + 4 + 1} = \sqrt{15}$, $|\vec{y}| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 4 + 4} = \sqrt{13}$.

$\Longrightarrow \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos(\frac{7}{\sqrt{15}\,\sqrt{13}})$.

2.27 Beispiel

In $\mathbb{R}^4$ sei eine 3-Ebene E_3 gegeben durch $Y = (0, 1, 2, 3)$ sowie

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - i \\ i^2 \\ i + 1 \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, 3. \text{ Wähle zB } \vec{n} = \frac{3}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Normalenform ergibt sich zu $E_3 = \{2\,x_1 - 3\,x_2 - 3\,x_4 = -12\}$.
Der Abstand von $Z = (1, 1, 1, 1)$ zu E_3 ist $d(Z, E_3) = \frac{8}{\sqrt{22}}$.

3. Lineare Algebra

3.I. Räume und Basen

3.1 Definition

Eine Menge mit einer inneren und einer äußeren Verknüpfung ist ein *Vektorraum*, wenn gilt:

- Innere Verknüpfung: Assoziativ, kommutativ, hat 0, hat Inverse.
- Äußere Verknüpfung: Assoziativ, kommutativ, hat 1.
- Innere und äußere Verknüpfung: Erfüllen beide Distributivgesetze.

3.2 Beispiel

- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit den üblichen Verknüpfungen.
- $\mathbb{R}^n$ mit den Verknüpfungen aus Kapitel 2, $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben wieder $x \in \mathbb{R}^n$, interpretiert als Spaltenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x_1 + 3\,x_2 = 0\}$ mit den Verknüpfungen des $\mathbb{R}^2$.

Wir beschränken uns von nun an auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Untervektorräume

3.3 Definition

Betrachte einen Vektorraum V. Eine Menge $U \subset V$ ist Untervektorraum von V, wenn U mit den Verknüpfungen von V selbst Vektorraum ist.

3.4 Bemerkung

- Für einen UVR reicht zu zeigen:
  - $x + y \in U$ für alle $x, y \in U$,
  - $a\,x \in U$ für alle $x \in U$ und $a \in \mathbb{R}$.
- Umgekehrt: Ist $0 \notin U$, dann kann U kein UVR sein.

3.5 Beispiel

- $g = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x_1 + 3\,x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ – vergleiche Beispiel 3.2
- Allgemein jede k-Ebene (dh Gerade, Ebene, etc) durch 0.
- Kein UVR von $\mathbb{R}^n$: $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x_1 + 3\,x_2 = 3\} \subset \mathbb{R}^2$.

Darstellung von Vektoren

Beobachtungen:

- $$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  $$= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  $\rightsquigarrow$ Kombination verschiedener anderer Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.
- Für $k \leq (n-1)$ betrachte k-Ebene $E = \left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j \, r^{(j)} \mid a_j \in \mathbb{R} \right\}$
  $\rightsquigarrow$ Jeder Vektor darin ist Kombination der Vektoren $r^{(j)} \in E$.

Allg. ist jeder Vektor durch Vektoren des selben VR ausdrückbar.

Fragen:

- Alle Vektoren durch die selben anderen Vektoren ausdrückbar?
- Wenn ja: Wie viele anderen Vektoren benötigt man dafür?

Linearkombinationen

3.6 Definition

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte $\mathcal{X} := \left\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$.

- Für $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{j=1}^{k} a_j\, x^{(j)}$ *Linearkombination* von $\mathcal{X}$.
- Es ist $\operatorname{span} \mathcal{X} := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j\, x^{(j)} \text{ für } a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \right\}$ der von $\mathcal{X}$ *aufgespannte Raum*.
- Ist $U = \operatorname{span} \mathcal{X}$, dann ist $\mathcal{X}$ *Erzeugendensystem* von U.

3.7 Proposition

Ist $\mathcal{X} := \left\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$, dann ist $\operatorname{span} \mathcal{X}$ ein UVR des $\mathbb{R}^n$.

3.8 Beispiel

Jede k-Ebene durch 0 ist $E = \operatorname{span} \left\{r^{(1)}, \dots, r^{(k)}\right\}$, ein UVR des $\mathbb{R}^n$.

3.9 Beispiel

5 t Milch, 1 t Schlagsahne, 1 t Joghurt, 2 t Milchpulver produziere die Fabrik 1 pro Tag: $x^{(1)} = (5,1,1,2)^T$.
Fabrik 2: $x^{(2)} = (4,1,3,2)^T$.
Fabrik 3: $x^{(3)} = (2,3,3,1)^T$.

Frage: Kann man durch geeignete Laufzeiten a_1, a_2, a_3 genau $x = (100,10,10,40)^T$ t (Milch, Schlagsahne, Joghurt, Milchpulver) erzeugen?

Mathematisch: Existieren a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{j=1}^{3} a_j x^{(j)}$?

Oder äquivalent: Ist $x \in \operatorname{span}\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right\}$?

Antwort: Nein. Es gibt keine Lösung der Gleichungen

$$a_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Grundlagen
Vektorgeo
LA
Räume
LGS
Matrizen
Analysis
Statistik

3.10 Beispiel

Seien $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $U = \operatorname{span}\left\{x^{(1)}, x^{(2)}\right\}$.

Für jedes $x \in U$ ist also $x = a_1\, x^{(1)} + a_2\, x^{(2)}$ mit $a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}$.

Aber $x^{(2)} = 2\, x^{(1)}$, daher $x = (a_1 + 2\, a_2)\, x^{(1)}$.

$\Longrightarrow \operatorname{span}\left\{x^{(1)}, x^{(2)}\right\} = \operatorname{span}\left\{x^{(1)}\right\} = U$.

3.11 Definition

Betrachte $\mathcal{X} = \left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ und $U = \operatorname{span} \mathcal{X}$.

$\mathcal{X}$ ist *minimales Erzeugendensystem* oder *Basis* von U, wenn $\operatorname{span} \mathcal{Y} \neq U$ für jede echte Teilmenge $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$.

Die beiden Richtungsvektoren einer Ebene durch 0 sind also eine Basis dieser Ebene: Weglassen würde die Gerade in Richtung des übriggebliebenen Vektors geben.

3.12 Proposition

Ein EZS $\mathcal{X} = \left\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann minimal, wenn $\sum_{j=1}^{k} a_j\, x^{(j)} = 0$ nur für $a_1 = \dots = a_k = 0$ gilt.

3.13 Definition

$\mathcal{X} = \left\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ ist *linear unabhängig*, wenn
$\sum_{j=1}^{k} a_j\, x^{(j)} = 0$ nur für $a_1 = \dots = a_k = 0$ gilt.
Im umgekehrten Fall heißt $\mathcal{X}$ linear abhängig.

3.14 Bemerkung

k Vektoren sind l. a. genau dann wenn einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar. Sie liegen dann in der selben $(k-1)$-Ebene – vergleiche die Definition der k-Ebene.

3.15 Beispiel

Sei $x^{(1)} = (3,0,1,2)^T$, $x^{(2)} = (0,-2,1,1)^T$, $x^{(3)} = (-1,1,2,-1)^T$.
$a_1\, x^{(1)} + a_2\, x^{(2)} + a_3\, x^{(3)} = 0$ hat nur die Lösung $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$\Longrightarrow \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right\}$ ist l. u.

▸ Rechnung ▸ Lösung

Mit $x^{(4)} = (1,4,4,-1)^T$ gilt $x^{(4)} = x^{(1)} - x^{(2)} + 2\, x^{(3)}$
$\Longrightarrow \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\right\}$ ist l. a.

▸ Rechnung ▸ Lösung

3.16 Beispiel

Für $j = 1, \ldots, n$ sei $e^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor, dessen j-te Komponente gleich 1 ist, während die anderen alle gleich 0 sind.
$\Longrightarrow |e^{(j)}| = 1$. Diese sogenannten *Einheitsvektoren* sind l. u.

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist als Linearkombination der $e^{(j)}$ darstellbar, wobei der Koeffizient a_j genau der j-ten Komponente x_j von x entspricht.

$\left\{e^{(j)} \mid j = 1, \ldots, n\right\}$ heißt deswegen *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$.

Existenz, Eindeutigkeit, Dimension

3.17 Proposition

- Jeder VR hat eine Basis und damit ein EZS.
- Die Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis ist eindeutig.

Eine Basis muss nicht eindeutig sein, es gilt aber:

3.18 Proposition

Zwei Basen eines VR haben die selbe Anzahl an Elementen.

3.19 Definition

Die Anzahl der Elemente einer Basis von U ist die *Dimension* $\dim U$.

3.20 Beispiel

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- Eine k-Ebene hat Dimension k.

Eigenschaften der Dimension

3.21 Proposition

Ist $\dim U = k$ und $\mathcal{X} = \left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right\} \subset U$ l. u., dann ist $\mathcal{X}$ ein EZS (und daher eine Basis) von U.

3.22 Proposition

Ist $\dim U = k$ und $\mathcal{Y} = \left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(i)}\right\} \subset U$ l. u. für ein $i < k$, dann kann man $\mathcal{Y}$ zu einer Basis $\mathcal{X} = \left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right\}$ von U ergänzen.

3.23 Proposition

Ist U ein UVR von V, dann ist $\dim U \leq \dim V$.

3.24 Proposition

Ist $U = \operatorname{span}\left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right\}$, dann ist $\dim U \leq k$ und man kann eine Basis aus $\left\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right\}$ gewinnen.

3.25 Beispiel

Seien $x^{(1)} = (1,1,2,3)^T$, $x^{(2)} = (1,1,3,2)^T$, $x^{(3)} = (1,1,1,4)^T$.

Welche Dimension hat $U = \operatorname{span}\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right\}$?

Beobachtung: $x^{(3)} = 2\,x^{(1)} - x^{(2)}$.

$\Longrightarrow$ das EZS ist l. a. und daher nicht minimal.

▸ Rechnung ▸ Lösung

Andererseits existiert kein $a \in \mathbb{R}$ mit $x^{(1)} = a\,x^{(2)}$.

$\Longrightarrow \left\{x^{(1)}, x^{(2)}\right\}$ ist l. u. EZS und daher Basis. $\Longrightarrow \dim(U) = 2$.

3.26 Beispiel

Es sind $x^{(1)} = (1,-1,0)^T$, $x^{(2)} = (0,-1,1)^T$, $x^{(3)} = (1,2,3)^T$ l.u.

$\Longrightarrow \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right\}$ sind eine alternative Basis des $\mathbb{R}^3$.

▸ Rechnung ▸ Lösung

Man kann zB $x = (3,2,1)^T$ mit $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$ darstellen.

▸ Rechnung ▸ Lösung

3. Lineare Algebra

3.II. Lineare Gleichungssysteme

Genaue Rechnung Beispiel 3.15

▸ Beispiel 3.15

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(1): & 3\,a_1 & & & - & 1\,a_3 & = & 0 \\
(2): & & - & 2\,a_2 & + & 1\,a_3 & = & 0 \\
(3): & 1\,a_1 & + & 1\,a_2 & + & 2\,a_3 & = & 0 \\
(4): & 2\,a_1 & + & 1\,a_2 & - & 1\,a_3 & = & 0
\end{array}
$$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist Lösung.

Weitere Lösungen?
Aus (1): $a_3 = 3\,a_1$. Aus (2): $a_2 = \frac{1}{2}\,a_3 = \frac{3}{2}\,a_1$.

Das ist beides erfüllt für

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 3, \qquad a_3 = 6$$

oder allgemeiner

$$a_1 = 2\,\lambda, \qquad a_2 = 3\,\lambda, \qquad a_3 = 6\,\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In (3) eingesetzt folgt: $0 = 2\,\lambda + 3\,\lambda + 12\,\lambda = 17\,\lambda$.
Das ist nur wahr für $\lambda = 0$.

$\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist die einzige Lösung.

Genaue Rechnung Beispiel 3.15, zweiter Teil

▸ Beispiel 3.15, zweiter Teil

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
(1): & 3\,a_1 & & & - & 1\,a_3 & + & 1\,a_4 & = & 0 \\
(2): & & - & 2\,a_2 & + & 1\,a_3 & + & 4\,a_4 & = & 0 \\
(3): & 1\,a_1 & + & 1\,a_2 & + & 2\,a_3 & + & 4\,a_4 & = & 0 \\
(4): & 2\,a_1 & + & 1\,a_2 & - & 1\,a_3 & - & 1\,a_4 & = & 0
\end{array}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ist Lösung.

▸ Gauß

Weitere Lösungen?
Aus (1): $a_3 = 3\,a_1 + a_4$. Aus (2): $a_2 = \frac{1}{2}\,a_3 + 2\,a_4 = \frac{3}{2}\,a_1 + \frac{5}{2}\,a_4$.

In (3) eingesetzt folgt: $\frac{17}{2}\,a_1 + \frac{17}{2}\,a_4 = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_4$.

$\Longrightarrow a_2 = -a_1$ und $a_3 = 2\,a_1$.

Eine Lösung ist also

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -1$$

oder allgemeiner

$$a_1 = \lambda, \quad a_2 = -\lambda, \quad a_3 = 2\,\lambda, \quad a_4 = -\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In (4): $2\,\lambda - \lambda - 2\,\lambda + \lambda = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ebenso für (1), (2), (3).

Genaue Rechnung Beispiel 3.25

▸ Beispiel 3.25

$$\begin{array}{lccccccccc} (1): & 1\,a_1 & + & 1\,a_2 & + & 1\,a_3 & = & 0 \\ (2): & 2\,a_1 & + & 3\,a_2 & + & 1\,a_3 & = & 0 \\ (3): & 3\,a_1 & + & 2\,a_2 & + & 4\,a_3 & = & 0 \end{array}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist Lösung.

Weitere Lösungen?
Aus (1): $a_1 = -a_2 - a_3$.
In (2): $a_2 - a_3 = 0 \Longrightarrow a_2 = a_3 \Longrightarrow a_1 = -2\,a_2$.

Eine Lösung ist also

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = -1, \qquad a_3 = -1$$

oder allgemeiner

$$a_1 = 2\,\lambda, \qquad a_2 = -\lambda, \qquad a_3 = -\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In (3): $-6\,\lambda + 2\,\lambda + 4\,\lambda = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ebenso für (1), (2).

Genaue Rechnung Beispiel 3.26

Beispiel 3.26

$$
\begin{array}{lccccccc}
(1): & 1\,a_1 & & & + & 1\,a_3 & = & 0 \\
(2): & 1\,a_1 & + & 1\,a_2 & - & 2\,a_3 & = & 0 \\
(3): & & & 1\,a_2 & + & 3\,a_3 & = & 0
\end{array}
$$

Gauß

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist Lösung.

Weitere Lösungen?
Aus (1): $a_1 = -a_3$. Aus (2): $a_2 = -a_1 + 2\,a_3$.

Eine Lösung ist also

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -3, \qquad a_3 = -1$$

oder allgemeiner

$$a_1 = \lambda, \qquad a_2 = -3\,\lambda, \qquad a_3 = -\lambda \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In (3): $0 = -3\,\lambda - 3\,\lambda = -6\,\lambda$ nur für $\lambda = 0$.

$\Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ einzige Lösung.

Genaue Rechnung Beispiel 3.26, zweiter Teil

▸ Beispiel 3.26, zweiter Teil

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
(1): & 1\,a_1 & & & + & 1\,a_3 & = & 3 \\
(2): & -1\,a_1 & - & 1\,a_2 & + & 2\,a_3 & = & 2 \\
(3): & & & 1\,a_2 & + & 3\,a_3 & = & 1
\end{array}$$

Aus (1): $a_1 = -a_3 + 3$.

Aus (2): $a_2 = -a_1 + 2\,a_3 - 2$.

In (3): $6\,a_3 - 5 = 1$.

$\Longrightarrow a_3 = 1$

$\Longrightarrow a_2 = -2$

$\Longrightarrow a_1 = 2$.

Einzige Lösung ist also

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = -2, \qquad a_3 = 1.$$

▸ LGS

Allgemeine Lineare Gleichungssysteme

Umbenennung: m Gleichungen mit n Unbekannten, genannt x.

Dh statt $\sum_{j=1}^{k} a_j\, x^{(j)} = x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\sum_{j=1}^{n} x_j\, a^{(j)} = b \in \mathbb{R}^m$.

Ein *Lineares Gleichungssystem* ist dann

$$\begin{array}{cccccccccc}
(1): & x_1\, a_1^{(1)} & + & x_2\, a_1^{(2)} & + & \dots & + & x_n\, a_1^{(n)} & = & b_1 \\
\vdots & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
(m): & x_1\, a_m^{(1)} & + & x_2\, a_m^{(2)} & + & \dots & + & x_n\, a_m^{(n)} & = & b_m
\end{array}$$

Ist $b = 0$, dann heißt das LGS *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

3.27 Proposition

- Jedes homogene LGS hat entweder genau eine Lösung (nämlich 0), oder unendlich viele.
- Jedes inhomogene LGS hat entweder genau eine Lösung, oder unendlich viele, oder keine.

Zulässige Zeilenoperationen

Zulässige Zeilenoperationen ändern Lösungsmenge eines LGS nicht:

- Vertauschen von Zeilen.
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0.
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

3.28 Beispiel

Im vorangegangenen Beispiel ▸ voriges Beispiel

- $1 \cdot (1) + (2) = (2')$ (statt (2)).
- $1 \cdot (2') + (3) = (3')$ (statt (3)).
- $\frac{1}{6} \cdot (3') = (3'')$ (statt $(3')$)

ergibt

$$\begin{array}{rcccccccl}
(1): & 1\,x_1 & & & + & 1\,x_3 & = & 3 & \\
(2'): & & - & 1\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 5 & \\
(3''): & & & & & 1\,x_3 & = & 1 & \Longrightarrow \text{ Lösung von eben.}
\end{array}$$

▸ Gauß

Gauß-Verfahren

Systematische Methode: Reduziere Zahl der Unbekannten schrittweise.

3.29 Beispiel

- Vorangegangenes Beispiel. voriges Beispiel
- Vorangegangenes Beispiel homogen. voriges Beispiel homogen

  $1 \cdot (1) + (2) = (2')$:

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
(1): & 1\,x_1 & & & + & 1\,x_3 & = & 0 \\
(2'): & & - & 1\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0 \\
(3): & & & 1\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0
\end{array}
$$

$1 \cdot (2') + (3) = (3')$:

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
(1): & 1\,x_1 & & & + & 1\,x_3 & = & 0 \\
(2'): & & - & 1\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0 \\
(3'): & & & & & 6\,x_3 & = & 0
\end{array}
$$

$\Longrightarrow 0 = x_3 = x_2 = x_1$ einzige Lösung.

Homogen und unendlich viele Lösungen

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
(1): & 3\,x_1 & & & - & 1\,x_3 & + & 1\,x_4 & = & 0 \\
(2): & & - & 2\,x_2 & + & 1\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \\
(3): & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \\
(4): & 2\,x_1 & + & 1\,x_2 & - & 1\,x_3 & - & 1\,x_4 & = & 0
\end{array}
$$

▸ ursprüngliches Beispiel

$-\frac{1}{3}\cdot(1)+(3)=(3'),\ -\frac{2}{3}\cdot(1)+(4)=(4')$:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
(3'): & 1\,x_2 & + & \frac{7}{3}\,x_3 & + & \frac{11}{3}\,x_4 & = & 0 \\
(4'): & 1\,x_2 & - & \frac{1}{3}\,x_3 & - & \frac{5}{3}\,x_4 & = & 0
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}\cdot(2)+(3')=(3''),\ \frac{1}{2}\cdot(2)+(4')=(4'')$:

$$
\begin{array}{lcrcrcl}
(3''): & & \frac{17}{6}\,x_3 & + & \frac{17}{3}\,x_4 & = & 0 \\
(4''): & - & \frac{1}{6}\,x_3 & + & \frac{1}{3}\,x_4 & = & 0
\end{array}
$$

$-\frac{1}{17}\cdot(3'')+(4'')=(4'''),\ -\frac{6}{17}(3'')=(3''')$:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
(3'''): & 1\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 0 \\
(4'''): & & & 0\,x_4 & = & 0
\end{array}
$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt für alle $x_4 =: \lambda \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow x_3 = -2\,\lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_1 = -\lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Lineare Algebra

3.III. Matrizen

3.30 Definition

Die schematische Anordnung der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ als

$$(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(j)} & \dots & a_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i^{(1)} & \dots & a_i^{(j)} & \dots & a_i^{(n)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_m^{(1)} & \dots & a_m^{(j)} & \dots & a_m^{(n)} \end{pmatrix} = \left(a_i^{(j)}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

ist eine $(m \times n)$-*Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

3.31 Bemerkung

- Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist eine (1×1)-Matrix.
- Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^m$ ist eine $(m \times 1)$-Matrix.
- Die i-te Zeile einer Matrix a_i ist selbst eine $(1 \times n)$-Matrix, genannt *Zeilenvektor*, mit $a_i^T \in \mathbb{R}^n$.

Transposition

3.32 Definition

Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die *transponierte* Matrix, gegeben durch $(a^T)_i^{(j)} = a_j^{(i)}$ für alle $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots m$.

Transposition ist also Vertauschung von Zeilen und Spalten.

3.33 Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$,

  mit $a_1 = (2, 7, 0)$, $a_2 = (3, 2, 0)$, $a_3 = (5, 0, 6)$, $a_4 = (0, 2, 6)$.

  Offenbar ist $a_i^T \in \mathbb{R}^3$, und $A^T = (a_1^T, \dots, a_4^T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

- $E_n := (e^{(1)}, \dots, e^{(n)}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*Einheitsmatrix*).

  Dann ist $E_n^T = E_n$.

3.34 Definition

Für A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Summe von A und B gegeben durch

$$A+B := (a^{(1)}+b^{(1)},\dots,a^{(n)}+b^{(n)}) = (a_i^{(j)}+b_i^{(j)})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Die Matrixaddition ist eine innere Verknüpfung in $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Auch eine äußere Verknüpfung wird wie üblich definiert.

3.35 Proposition

- Die Matrixaddition ist kommutativ.
- Die Matrixaddition ist assoziativ.
- Die Nullmatrix $O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist Neutrales der Matrixaddition, $-A$ das Inverse zu A.

3.36 Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ist das Produkt von A und B gegeben durch

$$A\,B := \left(a_i^T \cdot b^{(j)}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

3.37 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7\\ 3 & 2\\ 5 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} a_1^T\cdot b^{(1)} & a_1^T\cdot b^{(2)}\\ a_2^T\cdot b^{(1)} & a_2^T\cdot b^{(2)}\\ a_3^T\cdot b^{(1)} & a_3^T\cdot b^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+14 & 12+7\\ 3+4 & 18+2\\ 5+0 & 30+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19\\ 7 & 20\\ 5 & 30\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

$$(A\,B)\,C = \begin{pmatrix} 54 & 115 & 16\\ 47 & 62 & 7\\ 65 & 60 & 5\end{pmatrix} = A\,(B\,C) \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

$B\,A$ ist nicht definiert, $C\,(A\,B) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \neq \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$B\,(C\,A) = \begin{pmatrix} 67 & 115\\ 57 & 54\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 63 & 169\\ 39 & 58\end{pmatrix} = (C\,A)\,B$.

Eigenschaften der Matrixmultiplikation

Nach Beispiel 3.37 ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ.

3.38 Proposition

- Die Matrixmultiplikation ist assoziativ.
- E_n ist Neutrales der Matrixmultiplikation auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

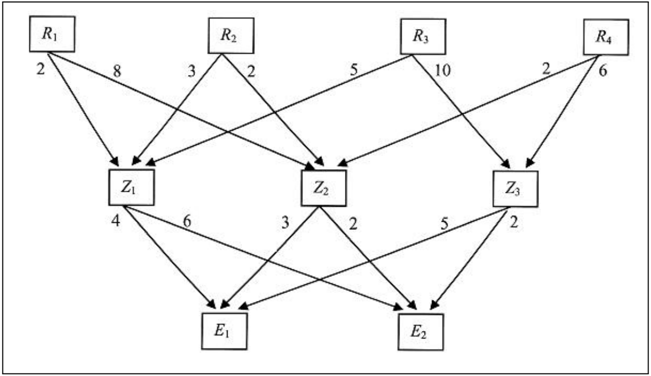
Beweis

Die Einheitsmatrix ist rechts- und linksneutral, weil
$a_i \cdot e^{(j)} = a_i^{(j)} = e_i \cdot a^{(j)}$.

3.39 Bemerkung

Ein LGS von m Gleichungen mit n Unbekannten kann man auch auffassen als $A\,x = b$ für die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und Unbekannte $x \in \mathbb{R}^n$.
Mit dem Gauß-Algorithmus angewendet auf $(A, b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ überführt man A in Zeilen-Stufen-Form $\widetilde{A}$ und löst dann $\widetilde{A}\,x = \widetilde{b}$.

Beispiel Produktionsplanung



- 4 Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4.
- 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3.
- 2 Endprodukte E_1, E_2.

Beschriftete Pfeile geben Eingangsmengen pro Einheit an $\rightsquigarrow$ Matrix.

Beispiel fortgesetzt - Matrix für Zwischenprodukte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

- j-te Spalte: Wie viel der jeweiligen Rohstoffe wird für eine Einheit des Zwischenprodukts Z_j benötigt?
- i-te Zeile: Wie viele Einheiten des Rohstoffs R_i werden für die jeweiligen Zwischenprodukte benötigt?

Welche Mengen an Rohstoffen R_1, R_2, R_3, und R_4 sind insgesamt nötig, um die Mengen Z_1, Z_2, Z_3 an Zwischenprodukten zu erzeugen?

$$R = A\,Z = Z_1\,a^{(1)} + Z_2\,a^{(2)} + Z_3\,a^{(3)}.$$

Konkretes Zahlenbeispiel: Es soll $Z_1 = 2$, $Z_2 = 3$, $Z_3 = 4$ erzeugt werden.

Dafür benötigt man $R = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Beispiel fortgesetzt - Matrizen für Endprodukte

$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

- j-te Spalte: Wie viel der jeweiligen Zwischenprodukte wird für eine Einheit des Endprodukts E_j benötigt?
- i-te Zeile: Wie viele Einheiten des Zwischenprodukts Z_i werden für die jeweiligen Endprodukte benötigt?

Welche Mengen an Rohstoffen R_1, R_2, R_3, und R_4 sind insgesamt nötig, um die Mengen E_1, E_2 an Endprodukten zu erzeugen?

- Benötigte Zwischenprodukte: $Z = B\,E$.
- Hierfür benötigte Rohstoffe: $R = A\,Z$.
- Insgesamt also: $R = A\,(B\,E) = (A\,B)\,E$.

$\Longrightarrow$ Die gesamte Produktion ist beschrieben durch $A\,B = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix}$.

Matrizen als lineare Abbildungen

- Im letzten Beispiel erfolgte durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ eine Zuordnung $\mathbb{R}^3 \ni Z \mapsto A\,Z = R \in \mathbb{R}^4$.
- Ebenso ergab $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ eine Zuordnung $\mathbb{R}^2 \ni E \mapsto B\,E = Z \in \mathbb{R}^3$.
- Tatsächlich definiert jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Abbildung $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mittels $f_M(x) = M\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- Solch eine Abbildung ist linear, dh für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_M(x+y) = f_M(x) + f_M(y)$ und $f_M(\alpha\,x) = \alpha\,f_M(x)$.
- Es gilt auch die Umkehrung: Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $f(x) = M\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- Jede Matrix ist also eine lineare Abbildung. Die Matrixmultiplikation entspricht dabei der Verkettung - siehe das obige Beispiel.

Beispiel Gesunde Ernährung

- Ein Apfel enthält pro 100 g 5 mg Vitamin C und 5 mg Magnesium.
- Eine Banane enthält pro 100 g 9 mg Vitamin C und 27 mg Magnesium.

Die Nährstoffmatrix ist dann gegeben durch $M = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 27 \end{pmatrix}$.

Frage 1: Welche Mengen an Nährstoffen N (in mg) nimmt man durch den Verzehr von $E = \begin{pmatrix} E_A \\ E_B \end{pmatrix}$ (in 100g) zu sich?

Antwort 1: $N = M\,E$.

Frage 2: Wieviel Äpfel und Bananen muss man essen, um den Nährstoffgehalt $N = \begin{pmatrix} N_C \\ N_{Mg} \end{pmatrix}$ zu sich zu nehmen?

Antwort 2: Löse das LGS $M\,E = N$ nach E .

Beispiel fortgesetzt

Rechnung: Löse das LGS $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_A \\ E_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_C \\ N_{Mg} \end{pmatrix}$:

$$(M, b) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 9 & N_C \\ 5 & 27 & N_{Mg} \end{array}\right)$$

- (1) + (2) = (2') :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 9 & N_C \\ 0 & 18 & N_{Mg} - N_C \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow E_B = \frac{1}{18}\left(-N_C + N_M\right) \text{ und } E_A = \frac{1}{10}\left(3\, N_C - N_{Mg}\right).$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} E_A \\ E_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} N_C - \frac{1}{10} N_{Mg} \\ -\frac{1}{18} N_C + \frac{1}{18} N_{Mg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_C \\ N_{Mg} \end{pmatrix}.$$

Beobachtung: $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$

Wir haben also das multiplikative Linksinverse von M gefunden.

Inverse einer Matrix

3.40 Definition

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass $B\,A = E_n = A\,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $B = A^{-1}$ ist dann die *Inverse* zu A.

3.41 Bemerkung

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar $\iff \forall\, b \in \mathbb{R}^n\, \exists_1\, x \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$.
- A^{-1} ist die Umkehrabbildung der linearen Abbildung A.
- Berechnung durch Anwendung des Gauß-Verfahrens auf (A, E_n).

3.42 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 0 & 6 & -20 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Invertierbarkeit bei (2×2)-Matrizen

Frage: Wann ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar?

Suche also x, y, w, z so, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rechnung:

$$\begin{array}{rcrcl} a\,x & + & b\,w & = & 1 \\ a\,y & + & b\,z & = & 0 \\ c\,x & + & d\,w & = & 0 \\ c\,y & + & d\,z & = & 1. \end{array}$$

Man erhält $w = -\frac{c}{ad-bc}$, $z = \frac{a}{ad-bc}$, $y = -\frac{b}{ad-bc}$, $x = \frac{d}{ad-bc}$.

3.43 Definition

Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $a\,d - b\,c$ die Determinante von A, kurz $\det A$.

3.44 Proposition

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Dann gilt

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. Analysis

4.I. Folgen und Reihen

4.1 Definition

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine *Folge* (in den Zahlen).

Schreibweise

- $a(n) =: a_n$
- Man bezeichnet auch die Bildmenge $a(\mathbb{N}) =: (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge.

4.2 Beispiel

- $a_n = \frac{1}{n+1}$.
- $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$
- $a_n = (-1)^n$.

Fibonacci–Folge

Fibonaccis Modell einer Kaninchen-Population (1202):

- Zu Anfang gibt es ein Paar neugeborener Kaninchen.
- Ein Paar junger Kaninchen braucht einen Monat um geschlechtsreif zu werden.
- Jedes Paar geschlechtsreifer Kaninchen wirft pro Monat ein weiteres Paar junger Kaninchen.
- Die Kaninchen befinden sich in einem abgeschlossenen Raum.
- Kaninchen sind unsterblich.

$\rightsquigarrow$ Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n sind die Fibonacci–Zahlen

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 1 + 2 = 3,\ \ldots\ldots,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$\frac{F_{n+1}}{F_n}$ nähert den goldenen Schnitt $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ an.

$\rightsquigarrow$ Fibonacci-Zahlen in der Natur, zB bei Sonnenblumen, ...

4.3 Definition

$a \in \mathbb{R}$ ist *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, ist *konvergent*.
Andernfalls ist sie *divergent*.

Beachte: Der Grenzwert einer Folge ist damit eindeutig bestimmt.

Schreib- und Sprechweisen

- $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, oder $a_n \longrightarrow a\,(n \to \infty)$.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, bzw divergiert.
- Ist $a = 0$, dann sagt man, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Nullfolge*.

4.4 Bemerkung

Ändern endlich vieler Terme ändert den Grenzwert nicht:
Falls $a_n = b_n$ für alle n größer ein n_*, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4.5 Beispiel

- $a_n = \frac{1}{n}$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann:
  $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, falls $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.
  Solch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es, also gilt $\frac{1}{n} \longrightarrow 0\,(n \to \infty)$.
- $a_n = \frac{n}{n+1}$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann:
  $|a_n - 1| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{1+n_0} < \varepsilon$, falls $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
  Solch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es, also gilt $\frac{n}{n+1} \longrightarrow 1\,(n \to \infty)$.
- $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$ mit
  - $|q| < 1$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann:
    $|a_n - 0| = |q|^n \leq |q|^{n_0} < \varepsilon$, falls n_0 so, dass $|q|^{n_0} < \varepsilon$.
    Solch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es, also gilt $q^n \longrightarrow 0\,(n \to \infty)$.
  - $q = 1$: $1^n = 1$ für alle n: Konstante Folge, konvergiert gegen 1.
  - $q = -1$: $(-1)^n$ ist abwechselnd 1 und -1: Folge divergiert.
  - $|q| > 1$: $|q|^n$ wird mit zunehmendem n immer größer: Folge divergiert, aber „anders“ als zuvor.

Beschränkte und unbeschränkte Folgen

4.6 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

4.7 Proposition

- Eine konvergente Folge ist beschränkt.
- Eine beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

4.8 Bemerkung

Eine unbeschränkte Folge ist damit immer divergent.

4.9 Proposition

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann ist $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

Bestimmte Divergenz

4.10 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *bestimmt divergent* falls eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

- Zu jedem $K > 0 \,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > K \,\forall\, n \geq n_0$.
- Zu jedem $K > 0 \,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -K \,\forall\, n \geq n_0$.

Schreibweise

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $\pm\infty$, dann schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ und spricht vom *uneigentlichen Grenzwert* $\pm\infty$.

4.11 Beispiel

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} -n^3 = -\infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\, n^2$ existiert nicht.

4.12 Proposition

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent, dann ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

4.13 Proposition

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit GW a und b.

- $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n).$$
- $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$
- Falls $b_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$
- Falls $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4.14 Beispiel

- $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$:

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ mit Prop 4.12.}$$

- $a_n = \frac{5n^2+3}{4n^2+2n+1}$:

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \stackrel{4.13}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(5+\frac{3}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} \stackrel{4.13}{=} \frac{5+0}{4+0+0} = \frac{5}{4}.$$

- $a_n = \frac{6n^2+9}{2n^3+2n}$:

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3}}{2+\frac{2}{n^2}} \stackrel{4.13}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n^2})} \stackrel{4.13}{=} \frac{0+0}{2+0} = 0.$$

- $a_n = \frac{n+\sin(n)}{n^2}$:

  Es gilt $n+\sin(n) \geq 0$ und $\sin(n) \leq 1 \leq n$ für $n \in \mathbb{N}$.
  $\implies 0 \leq a_n \leq \frac{2}{n} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mit Prop 4.13, letzter Teil.
  Alternativ: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{\sin(n)}{n^2}$ und Prop 4.9.

Bernoulli'sche Ungleichung

4.15 Lemma

Ist $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$.

Beweis

Mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:
Induktionsanfang $n = 0$ ist klar.
Angenommen, die Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n\,(1+x) \geq (1+n\,x)\,(1+x) \\ &= (1+n\,x+x+n\,x^2) \geq (1+(n+1)\,x).\end{aligned}$$

4.16 Beispiel

$a_n = \sqrt[n]{x}$ für ein $x \geq 1$.
Dann ist $a_n \geq 1$, und es gibt $b_n \geq 0$ mit $a_n = 1 + b_n$.
Es folgt $x = (1+b_n)^n \geq 1 + n\,b_n$ mit Lemma 4.15.
Dh $b_n \leq \frac{x-1}{n} \longrightarrow 0\,(n \to \infty) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Modellierung von Wachstum

Von einer Pflanze ist die jährliche Wachstumsrate x bekannt:

- Die Pflanze habe anfangs die Länge L.
- Hätte sie einmal im Jahr einen Wachstumsschub, bei dem sich das komplette Wachstum auf einmal realisiert, dann wäre die Länge nach einem Jahr $(1 + x)\,L$.
- Würde sich das gesamte Wachstum gleichmäßig auf zwei Wachstumsschübe verteilen, dann wäre die Länge nach einem halben Jahr $(1 + \frac{x}{2})\,L$.
- Der zweite Schub findet bezüglich der neuen Länge statt, dh nach einem weiteren halben Jahren ist die Länge $(1 + \frac{x}{2})\,(1 + \frac{x}{2})\,L$, also $(1 + \frac{x}{2})^2\,L$.
- Bei drei Wachstumsschüben im Jahr ergibt sich $(1 + \frac{x}{3})^3\,L$, etc.
- Der Faktor für n Wachstumsschübe ist $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$. Die dadurch gegebene Folge heißt *Exponentialfolge*.
- Für $n \to \infty$ nähern wir uns immer mehr dem tatsächlich stattfindenden Wachstum an.

4.17 Proposition

Die Exponentialfolge konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{n+x}{n} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für ein festes x betrachte n so groß, dass $x + n > 0$.

Dann ist $-\frac{x}{(n+1)(n+x)} > -1$ und Lemma 4.15 ergibt $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} > 1$.

$\Longrightarrow (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend in n für n groß genug.

Für $b_n := a_n(1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ zeigt man ganz ähnlich

$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$

$\Longrightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend in n.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $m > x$. Dann gilt:

$a_n(x) \leq \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{m}{nm}\right)^{nm} = (a_n(1))^m \leq b_n^m \leq b_1^m = 4^m.$

$\Longrightarrow (a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

4.18 Definition

Die *Exponentialfunktion* ist $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Offensichtlich gilt $\exp(0) = 1$.

4.19 Bemerkung

Die *Euler'sche Zahl*

$$\exp(1) =: e \approx 2,718281828459045235$$

ist irrational und sogar transzendent.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ohne Beweis:

4.20 Satz

$\exp(x)\,\exp(y) = \exp(x+y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften der Exponentialfunktion

4.21 Korollar

- $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\exp(x) > 1$ für alle $x > 0$.
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

$1 = \exp(x - x) \overset{4.20}{=} \exp(x)\exp(-x) \Longrightarrow \exp(x) \neq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$x > 0 \Longrightarrow (1 + \frac{x}{n})^n > 1 \Longrightarrow \exp(x) > 1 > 0$.

$x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \Longrightarrow \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$.

Man kann auch zeigen, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

4.22 Proposition

exp ist streng monoton wachsend und damit injektiv.

Beweis

$y > x \Longrightarrow y - x > 0 \Longrightarrow \exp(y) \overset{4.20}{=} \exp(y - x)\exp(x) \overset{4.21}{>} \exp(x)$.

4.23 Definition

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die *Logarithmusfunktion*

$$\exp^{-1} =: \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y \text{ so, dass } \exp(y) = x.$$

4.24 Proposition

- $\log(\exp(x)) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, $\exp(\log(x)) = x$ für $x \in (0, \infty)$.
- $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.
- $\log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.
- $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$.
- log ist streng monoton wachsend.
- $\log(x) > 0$ für alle $x > 1$, $\log(x) < 0$ für alle $0 < x < 1$.

Allgemeine Potenzfunktion

Erinnerung

Zu $q \in \mathbb{Q}$ war die Potenzfunktion $p_q : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, $p_q(x) = x^q$.

4.25 Proposition

Für $q \in \mathbb{Q}$ gilt $p_q(x) = \exp(q \log(x))$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Beweis

Mit vollständiger Induktion zeigt man die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$ und erweitert sie dann auf $-n \in \mathbb{Z}$ und $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$.

4.26 Definition

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die *allgemeine Potenzfunktion*

$$p_\alpha : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty),\ x \mapsto \exp(\alpha \log(x)) =: x^\alpha.$$

Die Potenzrechenregeln übertragen sich dank der Funktionalgleichung.

Allgemeine Exponentialfunktion

4.27 Definition

Für $a \in (0, \infty)$ ist die *Exponentialfunktion* zur Basis a

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty),\ x \mapsto \exp(x \log(a)) =: a^x.$$

Damit ist $\exp(x) = e^x = \exp_e(x)$.

4.28 Bemerkung

- Die Umkehrfunktion von $\exp_a$ für $a \neq 1$ ist $\log_a$, die Logarithmusfunktion zur Basis a:
  $y = \log_a(x) \iff x = a^y$ für $x \in (0, \infty)$.
- $\log_e = \log$ heißt auch *natürlicher Logarithmus* und wird oft mit ln bezeichnet.
- Man sieht leicht die Umrechnungsformel $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$.
- Rechenregeln übertragen sich dadurch von log auf $\log_a$.

4.29 Beispiel

- $\log_{10}(10000) = 4, \quad$ denn $10^4 = 10000$.
- $\log_4(64) = 3, \quad$ denn $4^3 = 64$.
- $\log_a(a^x) = x, \quad$ denn $a^x = a^x$.

4.30 Proposition

- $\lim\limits_{n\to\infty} \log(n) = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$ für $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^\alpha} = 0$ für alle $\alpha \in (0, \infty)$.

Beweis

Für $K > 0$ ist $\log(n) > K$, wenn $n > e^K$ und $n^\alpha > K$ wenn $n > K^{\frac{1}{\alpha}}$.
Da die Exponentialfolge wächst, gilt außerdem
$n^\alpha = e^{\alpha \log(n)} > (1 + \frac{\alpha \log(n)}{2})^2 > \frac{\alpha^2}{4} (\log(n))^2$.
Damit ist $0 \leq \frac{\log(n)}{n^\alpha} < \frac{\log(n)}{(\log(n))^2} \frac{4}{\alpha^2} \longrightarrow 0$.

Anwendungsbeispiel Halbwertszeit

Der Zerfall radioaktiver Elemente wird modelliert durch

- die Anfangsmenge M_0,
- die Menge $M(t)$ zum Zeitpunkt t,
- die Zerfallskonstante $\lambda = \log\left(\frac{M_0}{M(1)}\right) > 0$,
- und das Gesetz $M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$.

Frage: Zu welchem Zeitpunkt t_* ist nur noch die Hälfte der Anfangsmenge vorhanden?

$$
\begin{aligned}
M(t_*) = \tfrac{1}{2}\, M_0 &\iff M_0\, e^{-\lambda t_*} = \tfrac{1}{2}\, M_0 \\
&\iff e^{-\lambda t_*} = \tfrac{1}{2} \\
&\iff -\lambda\, t_* = \log(\tfrac{1}{2}) = -\log(2) \\
&\iff t_* = \frac{\log(2)}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Halbwertszeit $t_* = \dfrac{\log(2)}{\log\left(\frac{M_0}{M(1)}\right)}$.

4.31 Beispiel

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54.$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{(n+1)\text{-mal}} = n + 1.$$

4.32 Proposition

Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Beweis

$$(1-q) \sum_{j=0}^{n} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j - \sum_{j=0}^{n} q^{j+1}$$
$$= (q^0 + q^1 + \ldots + q^n) - (q^1 + q^2 + \ldots + q^{n+1}) = q^0 - q^{n+1}.$$

Beispiele

- $\sum_{j=0}^{5} 10^j \overset{4.32}{=} \frac{1-10^6}{1-10} = \frac{-999999}{-9} = 111111.$
- $\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^0 \overset{4.32}{=} \frac{1-(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{81} = \frac{40}{81}.$
- Bob sei unsterblich. Er will einen Wolkenkratzer bauen. Am ersten Tag schafft er 1 m, am Tag darauf die Hälfte (dh $\frac{1}{2}$ m), danach wieder die Hälfte (dh $\frac{1}{4}$ m), etc.
  Wie hoch wird das Haus werden?

  Haushöhe nach n Tagen:

  $$S_n = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (\tfrac{1}{2})^j$$
  $$\overset{4.32}{=} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right).$$

  Bobs Wolkenkratzer wird nach einer unendlich lange Bauzeit also $\lim_{n\to\infty} S_n = 2\left(1 - \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n\right) = 2$ m hoch.

4.33 Definition

Gegeben $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Folge $(a_j)_{j\in\{k,k+1,\dots\}}$. Die Summe $S_n := \sum_{j=k}^{n} a_j$ der ersten Folgenglieder bis $n \geq k$ ist die n-te *Partialsummen* der *Reihe* $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$.

Die Reihe ist konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Der Wert der Reihe ist dann $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{j=k}^{\infty} a_j$.

Analog definiert man (bestimmte) Divergenz einer Reihe.

Beachte: Man identifiziert die Reihe mit ihrem Grenzwert!

4.34 Proposition

Wenn $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ konvergiert, dann ist $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$.

Vorsicht: Die Umkehrung gilt nicht!

Die geometrische Reihe

4.35 Proposition

Die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

Dann gilt $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$.

Beweis

Für $q \neq 1$ ist laut Prop 4.32 $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, und $(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. Der Grenzwert ist 0.

Für $q = 1$ ist $\sum_{j=0}^{n} q^j = n+1 \longrightarrow \infty\,(n \to \infty)$.

4.36 Beispiel

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2. \qquad \sum_{j=0}^{\infty} 2^j = \infty.$$

Konvergenz- und Divergenzkriterien

4.37 Proposition (Majoranten- bzw Minorantenkriterium)

- $|a_j| \leq b_j \,\forall j \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergiert $\Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert.
- $a_j \geq b_j \geq 0 \,\forall j \in \mathbb{N}$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ divergiert $\Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

4.38 Proposition (Quotientenkriterium)

- $\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \leq q < 1$ für alle (großen) $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert.
- $\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \geq 1$ für alle (großen) $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

4.39 Bemerkung

Für $\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} < 1$ kann man mit dem Quotkrit keine Aussage treffen.

Beispiele

- $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j)}{2^j}$: $\quad |a_j| = \left|\frac{\sin(j)}{2^j}\right| \le \frac{1}{2^j}$ und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ konvergiert.

  $\overset{\text{Majokrit}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j)}{2^j}$ konvergiert.

- $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}$: $\quad \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = \frac{j+1}{j} \, \frac{2^j}{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \, \frac{j+1}{j} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \; (j \to \infty)$.

  $\overset{\text{Quotkrit}}{\Longrightarrow} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}$ konvergiert.

- $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$: $\quad \frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} = \frac{j^2}{(j+1)^2} \longrightarrow 1 \; (j \to \infty)$, Quotkrit hilft nicht.

  $$\begin{aligned} S_n &= 1 + \tfrac{1}{2\cdot 2} + \tfrac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{n\cdot n} \\ &\le 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) \\ &= 1 + 1 - \tfrac{1}{n} \le 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ (Teleskopsumme).} \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt.

  $\Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ konvergiert.

4.40 Proposition

Die harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergiert.

Beweis

Wir können die harmonische Reihe umschreiben:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{15}\right) + \cdots$$

$$=: a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k := \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j}.$$

Dann gilt: $a_k \geq \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2^k-1} \geq \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2^k}$

$$= (2^k - 1 - 2^{k-1} + 1)\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} > 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aber $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ divergiert. $\overset{\text{Minokrit}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

4. Analysis

4.II. Stetigkeit

Definition Stetigkeit

4.41 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig* in $x_0 \in D$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in D$ mit $|x_0 - x| < \delta$.
f ist stetig auf $M \subset D$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig ist.

4.42 Bemerkung

- Stetigkeit: Kleine Änderungen des Arguments können keine großen Änderungen des Funktionswerts bewirken.
- Anschaulich: Der Graph hat keine Lücken.

4.43 Proposition

id, sin, cos, exp und die konstante Funktion sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

Stetigkeit und Folgen

4.44 Satz

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für jede Folge mit $x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

4.45 Beispiel

- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \le 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$:

  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq -1 = f(0)$.

- $f(x) = \begin{cases} 2 + x\sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 2 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$ ist stetig in $x_0 = 0$:

  Für jede Folge mit $x_n \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt

  $|f(x_n) - f(0)| = |x_n \sin(\frac{1}{x_n})| \le |x_n| \longrightarrow 0$, also $f(x_n) \longrightarrow f(0)$.

Rechenregeln für stetige Funktionen

4.46 Proposition

Wenn $f : \mathbb{R} \supset D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \supset D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$ sind, dann sind auch $f + g$ und $f\,g$ stetig in x_0. Dies gilt auch für $\frac{f}{g}$, falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$.

4.47 Proposition

Wenn $f : \mathbb{R} \supset D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_f$ stetig ist, und $g : \mathbb{R} \supset D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in D_g$ stetig ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

4.48 Beispiel

- Da id stetig ist, ist die Potenzfunktion $p_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ auf ihrem Definitionsgebiet stetig. Da außerdem die konstante Funktion stetig ist, sind alle Polynome stetig auf $\mathbb{R}$.
- tan ist stetig auf seinem Definitionsgebiet.

Der Zwischenwertsatz

4.49 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es für alle $y \in [f(a), f(b)]$ (bzw $[f(b), f(a)]$) ein $c \in [a, b]$ so, dass $y = f(c)$.

4.50 Bemerkung

- Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt also jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
- Der ZWS garantiert nur Existenz, aber nicht Eindeutigkeit von c.

4.51 Beispiel

- $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig. Da $f(0) < 2 < f(5)$, gibt es ein $c \in [0, 5]$ mit $f(c) = 2$.
- $f : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ ist stetig. Da $f(0) = 1$ und $f(3\pi) = -1$, gibt es ein $c \in [0, 3\pi]$ mit $\cos(c) = 0$.
  Das ist aber nicht eindeutig: $\cos(\frac{2k+1}{2}\pi) = 0$ für $k \in \{0, 1, 2\}$.

Maximum und Minimum

4.52 Satz (vom Maximum und Minimum)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann existieren x_m und $x_M \in [a, b]$ so, dass $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ für alle $x \in [a, b]$.

Sprechweise

x_M heißt *Maximalstelle*, $f(x_M)$ *Maximum*
x_m heißt *Minimalstelle*, $f(x_m)$ *Minimum*.

4.53 Bemerkung

Ist I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(I)$ ein Intervall.

4.54 Beispiel

Wir betrachten $f(x) = x^2 \cos x + x(1 - x)$ für $x \in [0, 1]$.
Aus $f(x) \geq 0$ und $f(0) = 0$ folgt, dass 0 eine Minimalstelle ist.
Laut Satz muss auch eine Maximalstelle existieren: $x_M \approx 0,816$.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

4.55 Proposition

Sei I ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv und stetig auf I. Dann ist f^{-1} stetig auf $f(I)$.

4.56 Bemerkung

arcsin, arccos, arctan, log und die Potenzfunktionen p_q, $q \in \mathbb{Q}$, sind stetig auf ihrem Definitionsgebiet.
Stetigkeit der allgemeinen Exponential- und Potenzfunktion folgt.

4.57 Beispiel

Berechnung von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$: Es gilt $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\log(n))$.
Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktion sind stetig, ebenso ihre Produkte bzw Verkettungen. Damit ist der ganze Ausdruck stetig:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp(\tfrac{1}{n}\log(n)) = \exp(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}) \overset{4.30}{=} \exp(0) = 1.$$

4. Analysis

4.III. Differenzierbarkeit

Definition Differenzierbarkeit und Ableitung

4.58 Definition

Gegeben ein offenes Intervall I. Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *differenzierbar* in $x_0 \in I$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ existiert für jede Folge mit $x_n \in I$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Der Grenzwert ist die *Ableitung* $f'(x_0)$ von f in x_0.

f ist differenzierbar auf dem offenen Intervall $J \subset I$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in J$ differenzierbar ist.

4.59 Bemerkung

- $J \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ definiert die Ableitungsfunktion f'.
- *Differenzenquotient* $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$: Steigungen von Sekanten.
- Differenzierbarkeit: Graph hat eindeutige, nicht-senkrechte Tangente, deren Steigung ist die Ableitung.
- Anschaulich: Graph hat keine Ecken.
- Praktisch: Modelliert die Änderung einer Größe.

Beispiele

- $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$:
  Betrachte die NF $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

  $$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \implies \text{GW existiert nicht.}$$

- $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$:
  Mit der selben NF wie eben gilt

  $$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases} \implies \text{GW existiert nicht.}$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ist diffbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$:

  Für jede NF gilt $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$ mit GW 0.

Ableitungen einiger Funktionen

4.60 Proposition

- $f_c : x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f_c' = f_0$.
- $\mathrm{id} = p_1$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{id}' = f_1$.
- $p_2 : x \mapsto x^2$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $p_2' = 2\,p_1$.

Beweis

Für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine beliebige Folge $x_n \longrightarrow x_0$ gilt:

$$\frac{f_c(x_n) - f_c(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{id}(x_n) - \mathrm{id}(x_0)}{x_n - x_0} = 1.$$

$$\frac{p_2(x_n) - p_2(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{(x_n + x_0)(x_n - x_0)}{x_n - x_0} = x_n + x_0 \longrightarrow 2\,x_0.$$

4.61 Proposition

- $\sin$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\sin' = \cos$.
- $\cos$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\cos' = -\sin$.
- $\exp$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp' = \exp$.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

4.62 Proposition

Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

Beweis

Betrachte Folge $x_n \longrightarrow x_0 \overset{f \text{ diffbar in } x_0}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} (x_n - x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(x_0)) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$

4.63 Beispiel

$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 1$:

Für $x_n \longrightarrow 1$ mit $x_n > 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2x_n = 2 \neq f(1)$.

$\Longrightarrow f$ ist nicht stetig und erst recht nicht differenzierbar.

Zum direkten Nachweis betrachte zB $x_n := 1 - (-1)^n \frac{1}{n}$.

4.64 Proposition

Seien $f : \mathbb{R} \supset I_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \supset I_g \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I_f \cap I_g$. Dann gilt:

- $f + g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- $f\,g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$.
- $\frac{f}{g}$ ist differenzierbar in x_0 mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$, falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$.

4.65 Proposition (Kettenregel)

Wenn $f : \mathbb{R} \supset I_f \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I_f$ differenzierbar ist, und $g : \mathbb{R} \supset I_g \longrightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in I_g$ differenzierbar ist, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0)$.

4.66 Beispiel

- $p_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $p_n' = n\, p_{n-1}$, dh $(x^n)' = n\, x^{n-1}$:
  Induktiv: $(p_1)' = \mathrm{id}' = 1 = 1\, p_0$ und $p_2 = 2\, p_1$ laut Prop 4.60.
  $$(p_{n+1})' = (p_1\, p_n)' = p_1'\, p_n + p_1\, p_n' = p_n + p_1\, n\, p_{n-1} = (n+1)\, p_n(x).$$
- Ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$ ist als Summe und Produkt differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = a_1 + 2\, a_2\, x + \ldots + n\, a_n\, x^{n-1}$.
- tan ist als Quotient differenzierbarer Funktionen auf $(\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\,\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, differenzierbar mit $\tan'(x) = \frac{\cos(x)\, \sin'(x) - \sin(x)\, \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.
- $f(x) = e^{3x^2}$ ist als Verkettung differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \exp'(3\, p_2(x))\, 3\, p_2'(x) = 6\, x\, e^{3x^2}$.

Ableitung der Umkehrfunktion

4.67 Proposition

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $f(x_0) =: y_0$ mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

4.68 Beispiel

- log ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit $\log' = p_{-1}$, dh $log'(x) = \frac{1}{x}$:
  $x \mapsto \exp(x) =: y \Longrightarrow \log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}$.
- arccos ist differenzierbar auf $(-1, 1)$ mit $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:
  $x \mapsto \cos(x) =: y \Longrightarrow \arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))}$
  $= -\frac{1}{\sin(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
- arcsin ist differenzierbar auf $(-1, 1)$ mit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arctan ist differenzierbar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- p_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, diffbar auf $(0, \infty)$, $p'_\alpha = \alpha\, p_{\alpha-1}$, dh $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

4.69 Satz (Mittelwertsatz)

Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und differenzierbar auf (a, b), dann existiert ein $c \in (a, b)$ so, dass $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.70 Beispiel

Eine 150 km langen Etappe der Tour de France beinhalte 5 Höhenkm.
Durchschnittliche Steigung pro km ist also $\frac{5}{150} = \frac{1}{30} \approx 3.3\%$.
Zurückgelegte Höhenkm bei km x sei $[0, 150] \ni x \mapsto h(x)$.
Ist h differenzierbar, dann gibt es laut MWS einen Punkt, wo die Steigung h' genau gleich der Durchschnittssteigung ist.

4.71 Korollar

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- $f'(x) \geq 0 \, (f'(x) > 0) \, \forall \, x \in I \Longrightarrow f$ (streng) mon. steigend.
- $f'(x) \leq 0 \, (f'(x) < 0) \, \forall \, x \in I \Longrightarrow f$ (streng) mon. fallend.

Extremstellen

4.72 Definition

Gegeben eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_m \in D$ ist eine *lokale Minimalstelle* von f, wenn es $a,\ b \in D$ mit $[a, b] \subset D$ gibt, so dass $x_m \in [a, b]$ eine Minimalstelle von $f|_{[a,b]}$ ist. Analog definiert man eine *lokale Maximalstelle* x_M. Sowohl lokale Minimal- als auch Maximalstellen sind *lokale Extremstelle*.

4.73 Proposition (Notwendiges Kriterium)

Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $x_e \in I$ eine lokale Extremstelle von f, dann ist $f'(x_e) = 0$.

Beweis

Sei x_e lokale Minimalstelle, dh für x nahe x_e gilt $f(x_e) \leq f(x)$.
$\Longrightarrow \frac{f(x_n)-f(x_e)}{x_n-x_e} \leq 0$ für alle Folgen $x_n \longrightarrow x_e$ mit $x_n \leq x_e$, und
$\frac{f(x_n)-f(x_e)}{x_n-x_e} \geq 0$ für alle Folgen $x_n \longrightarrow x_e$ mit $x_n \geq x_e$.
$\Longrightarrow 0 \leq f'(x_e) \leq 0$.
Für Maximalstellen geht die Argumentation genauso.

Hinreichendes Kriterium

4.74 Proposition (Hinreichendes Kriterium)

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit differenzierbarer Ableitung und $x \in I$.

- Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, dann ist x eine lokale Minimalstelle.
- Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann ist x eine lokale Maximalstelle.

Wir verwenden die Notation $(f')' = f''$ („zweite Ableitung").

4.75 Bemerkung

- $f'(x) = 0,\ f''(x) \neq 0 \Longrightarrow x$ lokale Extremstelle.
- Um globale Extremstellen zu finden, vergleicht man alle lokalen Extremstellen und die Werte der Funktion am Rand des zugrunde liegenden, nicht notwendig offenen oder endlichen Intervalls.

4.76 Definition

Gegeben eine differenzierbare Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f ist (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wächst, und (streng) konkav, wenn f' (streng) monoton fällt. Eine lokale Extremstelle von f' ist eine Wendestelle von f.

4.77 Bemerkung

- Der Graph einer streng konvexen Funktion ist nach oben gekrümmt, einer streng konkaven Funktion nach unten.
- x_w Wendestelle von f und lokale Minimalstelle von f'
  $\rightsquigarrow f$ geht an x_w von konkav nach konvex über.
  x_w Wendestelle von f und lokale Maximalstelle von f'
  $\rightsquigarrow f$ geht an x_w von konvex nach konkav über.
- Ist f zweimal oder dreimal differenzierbar, dann ergibt die Anwendung des Monotoniekriteriums 4.71, des notwendigen Kriteriums 4.73 bzw des hinreichenden Kriteriums 4.74 auf f' Kriterien für Krümmungsverhalten und Wendestellen von f.

Kurvendiskussion

Eine *Kurvendiskussion* ist die Untersuchung einer Funktion auf alle Merkmale, die einem helfen, diese Funktion und ihren Graphen zu verstehen und zu veranschaulichen:

- Symmetrie, dh gerade oder ungerade (vgl Kapitel 1.V).
- Stetigkeit (vgl Kapitel 4.II).
- Nullstellen (evtl mit ZWS 4.49)
- Verhalten am Rand des Definitionsintervalls.
- Differenzierbarkeit.
- Monotonieverhalten (Monotoniekriterium Kor 4.71).
- Lokale Extremstellen (Notwendiges Kriterium Prop 4.73 und hinreichendes Kriterium Prop 4.74).
- Globale Extremstellen (vgl Bem 4.75).
- Krümmungsverhalten (vergleiche Bem 4.77).
- Wendestellen (vergleiche Bem 4.77).

Beispiel Kurvendiskussion

Wir betrachten $f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{2}x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

f ist stetig und differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = 2\,x\,e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\,x^2\,e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\,x\,(4-x)\,e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Weitere Ableitungen existieren ebenfalls, nämlich

$$f''(x) = (2-x)\,e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{4}\,x\,(4-x)\,e^{-\frac{1}{2}x} = \left(2 - 2\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x},$$

- Symmetrie:
  $f(-x) = x^2\,e^{\frac{1}{2}x} \Longrightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$
  $\Longrightarrow f$ weder gerade noch ungerade.
- Randverhalten:
  $$f(x_n) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } x_n \to \infty \\ \infty & \text{für } x_n \to -\infty. \end{cases}$$
- Nullstellen:
  $[f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0] \Longrightarrow \exists$ genau eine NST $x_N = 0$.

Beispiel Kurvendiskussion – Monotonie, Extrema

$(f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\, x\,(4-x)\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f''(x) = (2 - 2x + \frac{1}{4}x^2)\, e^{-\frac{1}{2}x}.)$

- Monotonieverhalten:
  $$\left[f'(x) > 0 \iff \frac{1}{2}\, x\,(4-x) > 0 \right]$$
  $\implies f$ streng monoton wachsend auf $(0, 4)$
  $$\left[f'(x) < 0 \iff \frac{1}{2}\, x\,(4-x) < 0 \right]$$
  $\implies f$ streng monoton fallend auf $(-\infty, 0)$ und $(4, \infty)$
- Lokale Extremstellen:
  $$\left[f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}\, x\,(4-x) = 0 \right]$$
  $\implies x_{e,1} = 0$ und $x_{e,2} = 4$ sind Kandidaten für Extremstellen.
  $f''(0) = 2\, e^0 = 2 > 0 \implies x_{e,1} = x_m = 0,\ f(x_m) = 0.$
  $f''(4) = -2\, e^{-2} < 0 \implies x_{e,2} = x_M = 4,\ f(x_M) = 16\, e^{-2}.$
- Globale Extremstellen:
  Wegen des Randverhaltens gibt es kein globales Maximum.
  $f(x) \geq 0 \implies x_{m,glob} = x_m$ globale Minimalstelle mit Min. 0.
  $\stackrel{\text{ZWS}}{\implies}$ Bildmenge $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.

Beispiel Kurvendiskussion – Krümmungsverhalten

$(f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\, x\,(4-x)\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f''(x) = (2 - 2\,x + \frac{1}{4}\, x^2)\, e^{-\frac{1}{2}x}.)$

- Wendestellen:

  $\left[f''(x) = 0 \iff x = 4 \pm 2\sqrt{2} \right]$

  $\Longrightarrow x_{w,1} = 4 + 2\sqrt{2}$ und $x_{w,2} = 4 - 2\sqrt{2}$ sind Kandidaten für Wendestellen.

  Weil $2 - 2\,x + \frac{1}{4}\,x^2$ eine quadratische Funktion mit positiver Zahl vor dem quadratischen Term ist, weiß man, dass der Graph eine nach oben offene Parabel ist.

  $\Longrightarrow f'' > 0$ auf $(-\infty, 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}, \infty)$,
  $f'' < 0$ auf $(4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2})$.

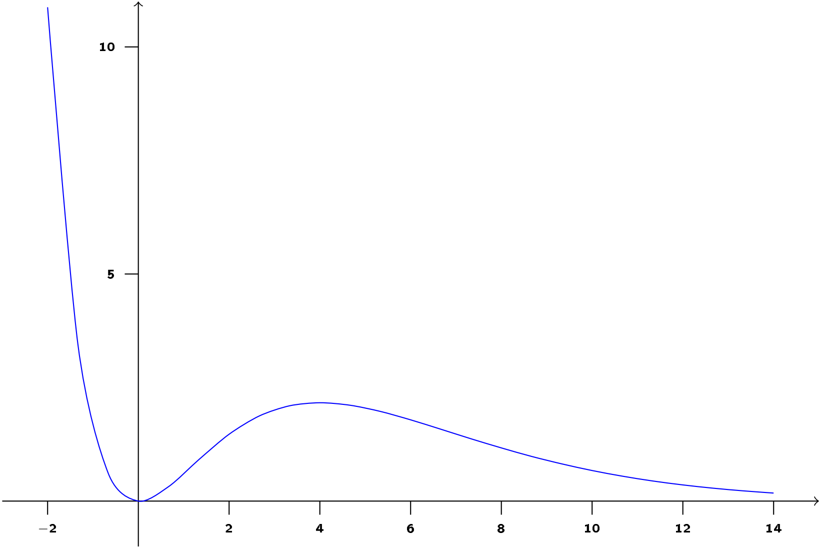
  $\Longrightarrow f$ streng konvex auf $(-\infty, 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}, \infty)$,
  f streng konkav auf $(4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}]$.

  $\Longrightarrow x_{w,1}$ Wendestelle von konkav nach konvex,
  $x_{w,2}$ Wendestelle von konvex nach konkav.

  (Man hätte auch $f'''(x_{w,1})$, $f'''(x_{w,2})$ betrachten können.)

Beispiel Kurvendiskussion - Graph

$$(f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}\, x\,(4-x)\, e^{-\frac{1}{2}x}, \quad f''(x) = (2 - 2x + \tfrac{1}{4}x^2)\, e^{-\frac{1}{2}x}.)$$



Extremwertaufgabe - Beispiel Dose

Wie sind Höhe und Radius einer zylindrischen Dose zu wählen, so dass der Materialverbrauch bei vorgegebenem Volumen minimal ist?

Volumen $V = \pi\, r^2\, h \Longrightarrow h(r) = \frac{V}{\pi r^2}$.
Oberfläche $O = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h \Longrightarrow O(r) = 2\,\pi\, r^2 + \frac{2V}{r}$.
Finde also $r \in (0, \infty)$ so, dass $O(r)$ minimal.

$O'(r) = 4\,\pi\, r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
$\Longrightarrow r_e = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ einziger Kandidat für eine lokale Extremstelle.

$O''(r_e) = 4\,\pi + \frac{4V}{r_e^3} = 4\,\pi + 8\,\pi = 12\,\pi > 0.$
$\Longrightarrow r_e$ ist lokale Minimalstelle.

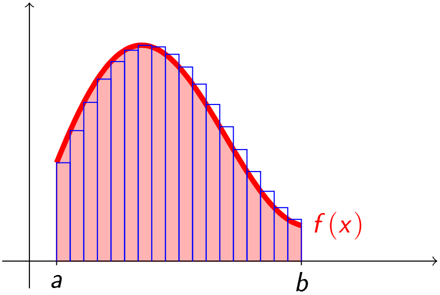
Es gilt aber $O(r) \longrightarrow \infty$ für $r \to 0$ oder $r \to \infty$.
$\Longrightarrow r_e$ ist globale Minimalstelle und daher tatsächlich optimal.

Zugehörige Höhe: $h_e = \frac{V}{\pi r_e^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

4. Analysis

4.IV. Integrierbarkeit

Motivation



Gesucht: Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse.

Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ ergibt die Näherung

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,(x_{j+1} - x_j).$$

Mehr Punkte führen zu einer besseren Näherung $\rightsquigarrow$ Folge von Zerlegungen.

4.78 Definition

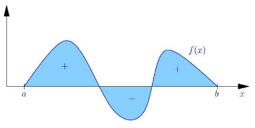
Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist *integrierbar* genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n} f(x_j)(x_{j+1} - x_j)$ für jede Folge von Zerlegungen existiert und den selben Wert hat. Der Grenzwert ist das *Integral* $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Für $f \geq 0$ ist $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ die Fläche zwischen Graph und x-Achse.

Für $f \leq 0$ ist $-\int\limits_a^b f(x)\, dx$ die Fläche zwischen Graph und x-Achse.

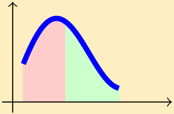
Vorsicht

Flächen über- und unterhalb der x-Achse „kürzen“ sich weg.



4.79 Proposition (Additivität des Integrals)

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$, $c \in [a, b]$, integrierbar sind mit $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.



4.80 Proposition (Linearität des Integrals)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind, dann ist $\lambda f + g$ integrierbar mit $\int_a^b (\lambda f + g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

4.81 Proposition (Monotonie des Integrals)

$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

4.82 Proposition (Dreiecksungleichung für Integrale)

Wenn $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, dann ist $|f|$ integrierbar und es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

4.83 Proposition

Die konstante Funktion $f_c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, ist integrierbar mit $\int_a^b f_c(x)\, dx = c\,(b - a)$.

Beweis

Für jede Folge von Zerlegungen gilt

$$\sum_{j=0}^{n} f_c(x_j)\,(x_{j+1} - x_j) = c\,(x_{n+1} - x_0) = c\,(b - a).$$

4.84 Proposition

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.

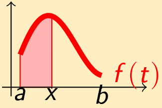
4.85 Bemerkung

Mit Prop 4.79 sind also auch stückweise stetige Funktionen integrierbar.

Flächenfunktion

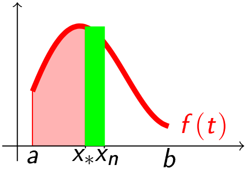
4.86 Proposition

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar
$\Longrightarrow F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ stetig auf $[a, b]$.



4.87 Proposition

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und die Flächenfunktion F differenzierbar, so gilt $F' = f$.



$F(x)$ = Fläche von a bis x
$F(x_n) \approx F(x_*) + (x_n - x_*)\, f(x_*)$
$\Longrightarrow f(x_*) \approx \frac{F(x_n) - F(x_*)}{x_n - x_*}$
$\Longrightarrow f(x_*)$ „=" $F'(x_*)$.

Der Hauptsatz

4.88 Definition

Eine *Stammfunktion* oder Integral von $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $S' = f$.

4.89 Proposition

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Flächenfunktion F differenzierbar und f hat die Stammfunktion F.

4.90 Bemerkung

- Man schreibt symbolisch $\int f(x)\, dx$ für eine Stammfkt von f.
- Stammfktnen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.
- Nicht jede intbare Funktion hat eine Stammfunktion, aber jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion und ist intbar.

4.91 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion S, so gilt $\int_a^b f(x)\, dx = S(b) - S(a)$.

Beispiele

Fläche unter einer Konstanten

Zu $f_c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ ist die Stammfunktion $S(x) = c\,x$.
Es gilt also $\int_a^b f_c(x)\,dx = c\,b - c\,a$ (vgl Prop 4.83).

Fläche unter einem Sinus-Bogen

Es gilt $(-\cos)' = \sin$, dh $-\cos$ ist eine Stammfunktion von sin.
Damit haben wir $\int_0^\pi \sin(x)\,dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$.

Fläche unter der Standard-Parabel

Mit $f(x) = x^2$ und $S(x) = \frac{1}{3}x^3$ gilt $S' = f$.
Daher ist $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$.

Fläche unter dem negativen Teil der Exponentialfunktion

Es ist $\exp' = \exp$, dh exp ist eine Stammfunktion von sich selbst.
Deswegen $\int_{-N}^0 e^x\,dx = e^0 - e^{-N} = 1 - e^{-N} \longrightarrow 1\ (N \to \infty)$.

Partielle Integration

4.92 Proposition

Seien $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gilt $\int u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x)\, dx$.

Merke

Das Integral eines Produkts zweier Funktionen ist „Aufleitung“ mal Funktion minus Integral von „Aufleitung“ mal Ableitung.

4.93 Beispiel

Berechnung von $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$.

Wir setzen $u'(x) = e^{-x}$ und $v(x) = x$. Dann ist $u(x) = -e^{-x}$ und $v'(x) = 1$, und mit Prop 4.92 ergibt sich eine Stammfunktion zu $\int x\, e^{-x}\, dx = x\,(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}$.
Damit ist $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = (-1\, e^{-1} - e^{-1}) - (0\, e^{-0} - e^{-0}) = 1 - \frac{2}{e}$.

4.94 Proposition

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt $\int_a^b g'(x)\,(f \circ g)(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$.

4.95 Bemerkung

Prop 4.94 ergibt sich aus der Ersetzung $t = g(x)$, daher der Name.

4.96 Beispiel

Berechnung von $\int_0^1 6\,x\,(3\,x^2 + 1)^{71}\,dx$.

Sei $g(x) = 3\,x^2 + 1$ und $f(t) = t^{71}$. Dann gilt $g'(x) = 6\,x$, $g(0) = 1$ und $g(1) = 4$ und wir erhalten mit Prop 4.94:
$\int_0^1 6\,x\,(3\,x^2 + 1)^{71}\,dx = \int_1^4 f(t)\,dt = \frac{1}{72}\,(4^{72} - 1^{72}) = \frac{4^{72}-1}{72}$.

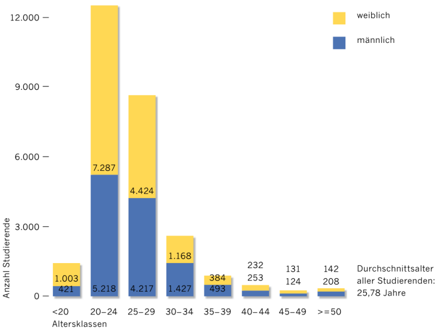
5. Statistik

5.1. Grundbegriffe

Ziel

Bei Beobachtungen, Erhebungen und Experimenten anfallende Daten so aufzubereiten, dass sie durchschaubar werden.

Abbildung 11: Studierende – Personen nach Altersstruktur und Geschlecht im Wintersemester 2010/11



Wenn am nächsten Sonntag Bundestagswahl wäre, würden 41% CDU/CSU, 25% SPD, 10% Grüne, 4% FDP, etc wählen (Emnid, 24.1.2015).

Grundgesamtheit und Stichprobe

Gegeben eine Fragestellung, die statistisch untersucht werden soll.

5.1 Definition

Die *Grundgesamtheit* Ω ist die Menge aller uns interessierenden Objekte.
Ein Element ω der Grundgesamtheit ist eine *statistische Einheiten*.

5.2 Beispiel

$\Omega = \{$alle Studierenden der Universität Bonn$\}$.
$\Omega = \{$alle Wahlberechtigten in Deutschland$\}$.

5.3 Definition

Eine *Stichprobe* $\chi = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ ist der erfasste Teil der Grundgesamtheit.

5.4 Beispiel

$\chi = \{$alle Studierenden in dieser Vorlesung$\}$.
$\chi = \{$für die Umfrage angesprochene Wahlberechtigte$\}$.

5.5 Definition

Ein *Merkmal* ist eine Eigenschaft einer statistischen Einheit.
Die *Merkmalsausprägungen* sind alle möglichen Werte, die ein Merkmal annehmen kann.

5.6 Bemerkung

Man kann ein Merkmal als Abbildung $X : \Omega \longrightarrow \{\text{Ausprägungen}\}$ ansehen. $X(\omega)$ ist dann die Ausprägung des Merkmals X der statistischen Einheit ω.

5.7 Definition

Die in der Stichprobe $\chi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ beobachteten Merkmale $x_i = X(\omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sind *Daten*.

5.8 Beispiel

$\Omega = \{\text{alle Studierenden der Universität Bonn}\}$
$X = $ Alter von Studierenden, $X(\omega) = $ Alter der Studierenden ω.

Merkmalstypen

- *Nominal*: Merkmal ist rein qualitativ. Ausprägungen können unterschieden werden, aber haben keine natürliche Ordnung: CDU/SPD/FDP, oder braun/gelb/rot.
- *Ordinal*: Merkmal ist qualitativ. Ausprägungen haben eine natürliche Ordnung $\rightsquigarrow$ scheinbar quantitativ: gut/mittel/schlecht.
- *Metrisch*: Merkmal ist quantitativ. Ausprägungen sind Zahlen und können sinnvoll addiert und subtrahiert werden: Alter, Vermögen, Messwert einer Konzentration.
  Es gibt *diskrete* und *kontinuierliche* metrische Merkmale.

5.9 Bemerkung

Metrische Merkmale können durch Klassenbildung in ordinale Merkmale überführt werden: Größe zw 150 und 160 cm $\to$ klein, ...

5.10 Beispiel

Vom Wähler gewählte Partei: nominal. Klausurnote: ordinal.
Alter von Probanden: kontinuierlich. Regentage pro Woche: diskret.

Vorsicht

Die Bezeichnung X wird nicht nur für das Merkmal (dh die Abbildung), sondern auch als Platzhalter für mögliche Merkmalsausprägungen (dh Elemente der Bildmenge) verwendet.

Eine Stichprobe χ enthalte N statistische Einheiten $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

5.11 Definition

Die Anzahl der Einheiten mit Ausprägung X ist die *absolute Häufigkeit* $h(X)$ der Auspräung X.
$f(X) = \frac{h(X)}{N}$ ist die *relative Häufigkeit* der Ausprägung X.

5.12 Bemerkung

Mathematisch formuliert ist $h(X)$ also die Anzahl der Element in der Urbildmenge des Bildmengenelements X.

Darstellung von Daten: Häufigkeitstabelle

Beispiel für eine Häufigkeitstabelle

Verteilung der Blutgruppen in einer Erhebung vom Umfang N = 50

Blutgruppe x	*h(x)*	*f(x)*
0	19	38%
A	21	42%
B	6	12%
AB	4	8%
Σ	50	100%

Beispiel für eine Häufigkeitstabelle

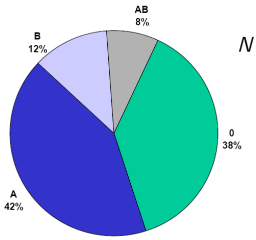
Anzahl der Kinder pro Familie in einer Erhebung vom Unfang N = 17689 (ECRHS, 30 Zentren)

Anzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>9
Absolute Häufigkeit	1706	5068	4385	2708	1590	887	544	314	195	120	172
Relative Häufigkeit	9.6%	28.7%	24.8%	15.3%	9.0%	5.0%	3.1%	1.8%	1.1%	0.7%	0.9%
Relative Summen-häufigkeit	9.6%	38.3%	63.1%	78.4%	87.4%	92.4%	95.5%	97.3%	98.4%	99.1%	100%

Darstellung von Daten: Kreisdiagramm

Relative Häufigkeiten nominaler Merkmale: Kreisdiagramm.

Beispiel für ein Kreisdiagramm



$N = 50$

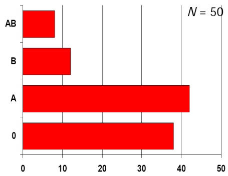
x	$f(x)$	Aufteilung der Winkelsumme
0	38%	$0.38 \cdot 360° = 136.8°$
A	42%	$0.42 \cdot 360° = 151.2°$
B	12%	$0.12 \cdot 360° = 43.2°$
AB	8%	$0.08 \cdot 360° = 28.8°$

Flächen der Segmente proportional zur relativen Häufigkeit.

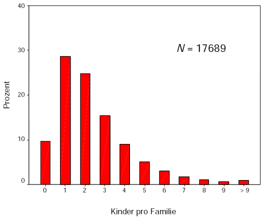
Darstellung von Daten: Balken-/Stabdiagramm

Häufigkeiten diskreter metrischer Merkmale: Balken-/Stabdiagramm.

Beispiel für ein Balkendiagramm



Beispiel für ein Stabdiagramm



Längen/Höhen der Rechtecke proportional zur Häufigkeit.

Klassenbildung

Bei kontinuierlichen metrischen Merkmalen ist es häufig sinnvoll, sie in Klassen einzuteilen und so ordinale Merkmale zu erhalten.

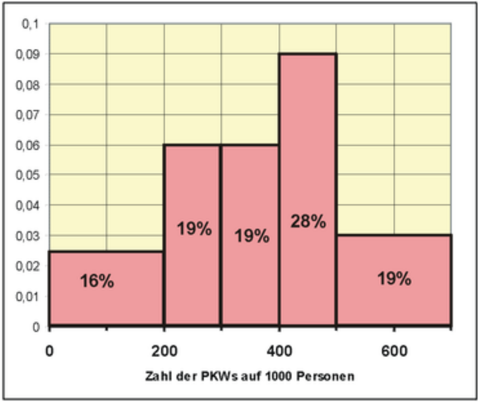
5.13 Beispiel

Es liegen für 32 europäische Länder die Anzahlen der PKW pro 1000 Einwohner vor:

Klasse j	**Zahl der PKW pro 1000**	**Anzahl der Länder (absolute Klassenhäufigkeit) n_j**	**Klassenbreite d_j**	**Säulenhöhe (Häufigkeitsdichte) $h_j = n_j/d_j$**
1	über 0 - bis 200	5	200 - 0 = 200	0,025
2	über 200 bis 300	6	100	0,06
3	über 300 bis 400	6	100	0,06
4	über 400 bis 500	9	100	0,09
5	über 500 bis 700	6	200	0,03
Summe Σ		32		

Darstellung von Daten: Histogramm

Ordinale Merkmale können in einem Histogramm dargestellt werden:



Histogramm der Zahl der PKWs auf 1000 Personen in 32 ausgewählten Ländern

Flächen der Rechtecke proportional zur Häufigkeit, nicht die Höhen!

5. Statistik

5.II. Kennzahlen

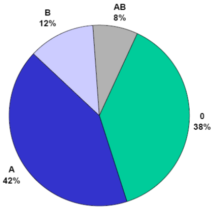
5.14 Definition

Der *Modus* oder *Modalwert* eines Datensatzes ist die Merkmalsausprägung, die am häufigsten vorkommt.

Der Modus ist nicht unbedingt eindeutig.

5.15 Beispiel

Beispiel: Verteilung der Blutgruppen



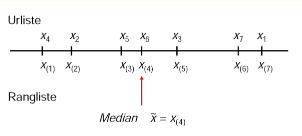
Modalwert = Blutgruppe A

Kennzahl Median

5.16 Definition

Für einen ordinalen oder metrischen Datensatz ist der *Median* $\tilde{x}$ der Zentralwert, der die Verteilung der Ausprägungen in der Mitte teilt: 50% der Werte sind kleiner (gleich) dem Median und 50% größer (gleich).

5.17 Beispiel



Berechnung bei metrischen Merkmalen

Für einen Datensatz der Größe N gilt (nach Sortierung: $x_i \leq x_{i+1}$)

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{falls } N \text{ ungerade} \\ \dfrac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2} & \text{falls } N \text{ gerade.} \end{cases}$$

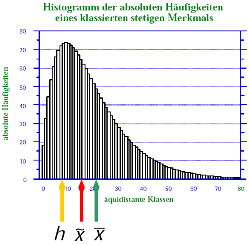
5.18 Definition

Für einen metrischen Datensatz $\{x_1, \ldots, x_N\}$ ist der *Mittelwert* gegeben durch das arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j$.

Der Mittelwert ist empfindlicher gegenüber „Ausreißer" als der Median.

Bei symmetrischen Verteilungen gilt : $\bar{x} = \tilde{x} = h$ (Modus)

Bei rechtsschiefen Verteilungen gilt : $h < \underline{\tilde{x} < \bar{x}}$



Vergleich Mittelwert-Median

5.19 Beispiel

Die Einkommen einer Gruppe von 10 Personen verteilen sich wie folgt:
9 Personen verdienen jeweils 1.000 Euro.
1 Person verdient 1.000.000 Euro.
Mittelwert = 100.900 Euro. (Durchschnittseinkommen)
Median = 1.000 Euro.

5.20 Beispiel

Die Einkommen einer Gruppe von 10 Personen verteilen sich wie folgt:
6 Personen verdienen jeweils 1.000 Euro.
4 Personen verdienen jeweils 2.000 Euro.
Mittelwert = 1.400 Euro. (Durchschnittseinkommen)
Median = 1.000 Euro.

Kennzahlen Perzentile

5.21 Definition

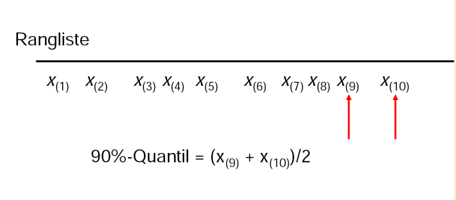
Für einen ordinalen oder metrischen Datensatz ist das *p-Perzentil* $\tilde{x}_p$ ein Wert, so dass $p\%$ aller Werte kleiner (gleich) $\tilde{x}_p$ sind und $(100-p)\%$ größer (gleich) $\tilde{x}_p$ sind.

5.22 Bemerkung

Median $\tilde{x} = \tilde{x}_{50}$.
Oberes Quartil $= \tilde{x}_{75}$.
Unteres Quartil $= \tilde{x}_{25}$.

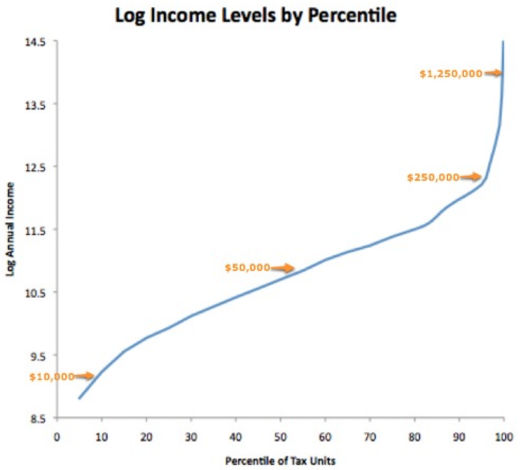
5.23 Beispiel

Berechnung von $\tilde{x}_{90}$:



Anwendung von Perzentilen

Einkommensverteilung in den USA:

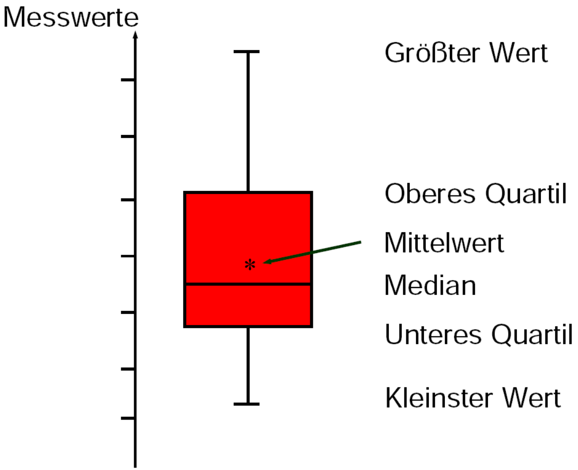


Quelle: Brad DeLong,

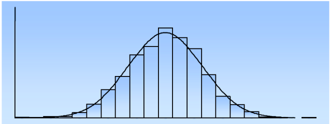
http://delong.typepad.com/sdj/2011/01/on-the-richness-of-the-rich-once-again.html

Boxplot

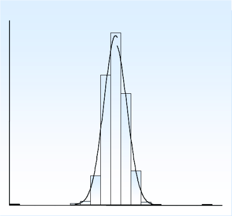
Die bislang eingeführten Kennzahlen lassen sich im sogenannten Boxplot zusammenfassen:



Bislang erfassen unsere Kennzahlen noch nicht die Streuung von Daten:



Große Streuung



Kleine Streuung

5.24 Beispiel

Datensätze mit gleichem Median und gleichem Mittelwert können trotzdem unterschiedliche Streuung haben: $\{5, 10, 15\}$ und $\{1, 10, 19\}$.

Streuungsmaße

Für einen sortierten metrischen Datensatz $\{x_1, \ldots, x_N\}$ gibt es verschiedene Streuungsmaße:

- *Spannweite*: $r = x_N - x_1$.
- *Quartilsabstand*: $q = \tilde{x}_{75} - \tilde{x}_{25}$.
- *Varianz*: $\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$.
- *Standardabweichung*: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

5.25 Beispiel

Punkte bei einer Klausuraufgabe:

1 3 0, 5 4 2 1, 5 0 2 0 0 0 1 4 1 0 3 4.

Mittelwert: $\frac{1+3+0{,}5+4+2+1{,}5+2+1+4+1+3+4}{17} = \frac{27}{17} \approx 1,59$.

Varianz: $\frac{(1-1{,}59)^2+(3-1{,}59)^2+(0{,}5-1{,}59)^2+\ldots+(4-1{,}59)^2}{16} \approx 2,29$.

Standardabweichung: $\sqrt{2,29} \approx 1,51$.

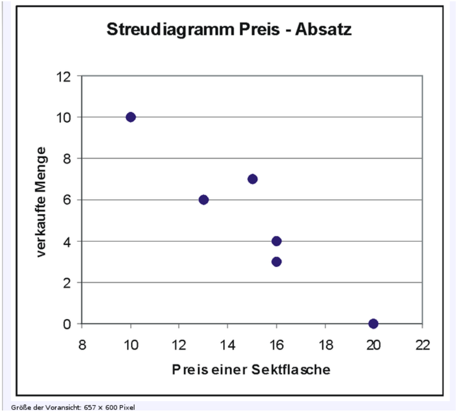
5. Statistik

5.III. Korrelation

Streudiagramme

Wir betrachten nun ordinale oder metrische Daten, die aus den Werten von zwei (oder mehr) Merkmalen bestehen, z.B. den Düngereinsatz und den Ertrag in einem Jahr.

Ein Streudiagramm trägt die Werte gegeneinander auf:



Empirische Kovarianz

Wir fragen uns, ob die Daten x und y in einem Zusammenhang stehen.

Vorsicht

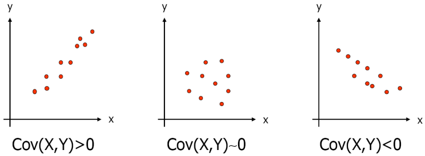
Die Richtung eines Zusammenhangs ist aus den Daten nie ersichtlich.

5.26 Definition

Die empirische Kovarianz ist $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

5.27 Bemerkung

- $s_{xy} > 0 \implies x$ und y positiv korreliert: je mehr x desto mehr y.
- $s_{xy} < 0 \implies x$ und y negativ korreliert: je mehr x desto weniger y.
- $s_{xy} = 0 \implies x$ und y nicht korreliert: kein Zusammenhang.



Scheinkorrelation

Vorsicht

Korrelationen sind ein Hinweis auf Kausalitäten, aber kein Beweis.

5.28 Beispiel

- Die Anzahl von Störchen und die Anzahl von Geburten in einem Ort ist positiv korreliert:
  Statistisch bewiesen: Störche bringen Kinder!
  Oder auch: Neugeborene ziehen Störche an!

  (Mögliche Erklärung: Der ländliche Raum.)

- Die Höhe des Einkommens und die Anzahl der Krankenhausbesuche ist positiv korreliert.
  Statistisch bewiesen: Geld macht krank!
  Oder auch: Krankenhausaufenthalte sind lukrativ!

  (Mögliche Erklärung: Das Alter.)

Beispiel: Ergebnisse einer Klausur

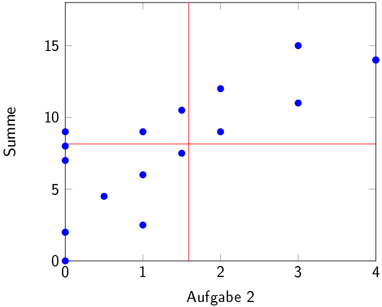
Grundlagen
Vektorgeo
LA
Analysis
Statistik
Grundbegriff
Kennzahlen
Korrelation
Regression

Aufgabe 2	1	3	0,5	4	2	1,5	0	2	0	0	0	1	4	1	0	3	4
Summe	2,5	15	4,5	14	12	7,5	7	9	2	0	9	9	14	6	2	11	14

Kennzahlen

Mittelwerte: $\bar{x} = 1,59$, $\bar{y} = 8,15$.
Varianzen: $\sigma_x^2 = 2,29$, $\sigma_y^2 = 23,02$.
Kovarianz: $s_{xy} = 6,19$.
Bemerkung: $\frac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \approx 0,85$.

Streudiagramm:



Empirischer Korrelationskoeffizient

Wir definieren nun ein Maß für die Stärke eine Korrelation.

5.29 Definition

Der empirische Korrelationskoeffizient ist $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

5.30 Bemerkung

Der empirische Korrelationskoeffizient liegt zwischen -1 und 1.

Interpretation

- $r_{xy} = -1$: vollständiger negativer linearer Zusammenhang.
- $r_{xy} = 1$: vollständiger positiver linearer Zusammenhang.
- $r_{xy} = 0$: kein linearer Zusammenhang.

5. Statistik

5.IV. Regression

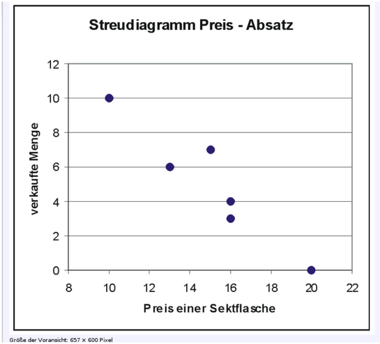
- Ziel: Zusammenhang zwischen statistischen Variablen präzisieren und Aussagen über zukünftige Daten möglich machen.
- Voraussetzung: Unabhängige/abhängige Variablen (durch inhaltliche Überlegungen) vorher festlegen.
- Resultat: Vorhersagen für die Entwicklung der abhängigen Variablen bei Änderung der unabhängigen.
- Vorsicht: Umkehrung nicht zulässig! Kein Kausalzusammenhang!

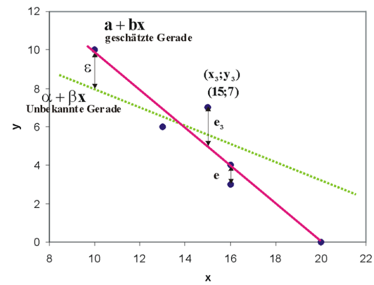
5.31 Beispiel

Die Merkmale Alter und Vermögen korrelieren positiv.
Man kann von höherem Alter auf größeres Vermögen schließen, aber nicht umgekehrt.
Also ist das Alter die unabhängige Variable und wir können versuchen, den statistischen Zusammenhang genauer zu beschreiben.

Beispiel: Sekt

Absatz von Sektflaschen





Quelle: Wikipedia

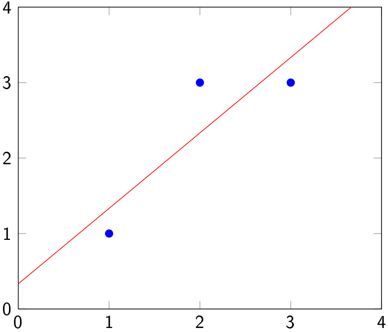
Lineare Regression mit Kleinste-Quadrate-Prinzip

- Suche affin-lineare Funktion $f(x) = a + b\,x$ so, dass die Daten möglichst gut durch graph(f) angenähert werden.
- Für Daten $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ wähle (Regressions-)Parameter $a,\ b \in \mathbb{R}$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$ minimal wird (*Kleinste-Quadrate-Prinzip*).
- Minimiere also $g(a, b) := \sum_{i=1}^{n} (a + b\,x_i - y_i)^2$.
- Für alle b ist $q(a) = g(a, b)$ eine quadratische Funktion, $q'(a) = \sum_{i=1}^{n} 2\,(a + b\,x_i - y_i) = 0 \iff a + \bar{x}\,b - \bar{y} = 0.$
- Für alle a ist $w(b) = g(a, b)$ eine quadratische Funktion, $w'(b) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(a + bx_i - y_i) = 0 \iff a\bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(bx_i - y_i) = 0.$
- $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{s_{xy}}{\sigma_x^2}, \qquad a = \bar{y} - b\,\bar{x}.$

Beispiel für lineare Regression

Gegeben sei der Datensatz $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$.

- $\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2, \quad \bar{y} = \frac{1+3+3}{3} = \frac{7}{3}.$
- $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = 1, \; a = \bar{y} - b\,\bar{x} = \frac{1}{3}.$



Bestimmtheitsmaß

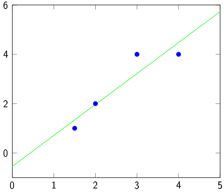
Welcher Anteil der Variation von y wird durch die Regression erklärt?

5.32 Definition

Für eine Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ und deren Regression f ist $R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ das *Bestimmtheitsmaß*.

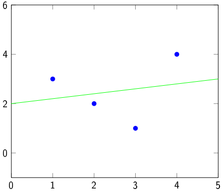
Für $R^2 = 1$ wird die Variation vollständig durch die Regression erklärt.
Für $R^2 = 0$ wird die Variation gar nicht durch die Regression erklärt.

$(\frac{3}{2}, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$.



$f(x) = -0,542 + 1,254\,x$,
$R^2 = 0,86$.

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 4)$.

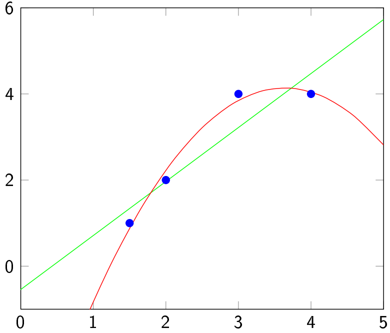


$f(x) = 2 + 0,2\,x$,
$R^2 = 0,04$.

Regression mit mehr als 2 Parametern

Jetzt $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = a + b\,x + c\,x^2$ approximiert:
Minimiere $\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a + b\,x_i + c\,x_i^2 - y_i\right)^2$.
Wie eben erhält man Formeln für die Parameter.

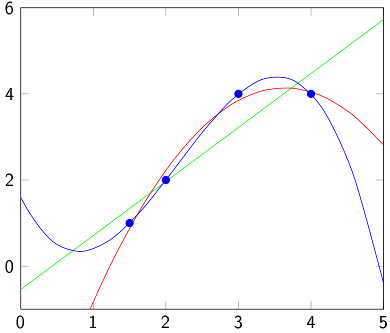
Wieder Daten $(\frac{3}{2}, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$.



2 Parameter: $f(x) = -0,542 + 1,254\,x$, $R^2 = 0,86$.
3 Parameter: $f(x) = -5,30 + 5,19\,x - 0,714x^2$, $R^2 = 0,987$.

Regression mit 4 Parametern

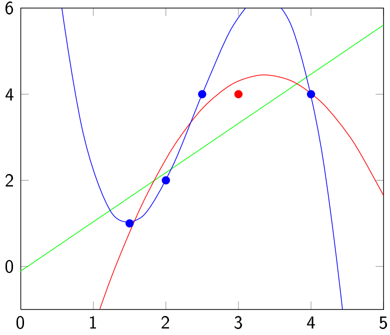
Jetzt suchen wir $f(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$.



- 2 Parameter: $f(x) = -0,542 + 1,254\,x$, $R^2 = 0,86$.
- 3 Parameter: $f(x) = -5,30 + 5,19\,x - 0,714\,x^2$, $R^2 = 0,987$.
- 4 Parameter: $f(x) = 1,6 - 3,4\,x + 2,6\,x^2 - 0,4\,x^3$, $R^2 = 1$.

Andere Daten

Leicht andere Daten: $(\frac{3}{2}, 1)$, $(2, 2)$, $(\frac{5}{2}, 4)$, $(4, 4)$
statt $(\frac{3}{2}, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$.



2 Parameter: $f(x) = -0,107 + 1,1428\,x$, $R^2 = 0,68$.
3 Parameter: $f(x) = -7,43 + 7,06\,x - 1,049\,x^2$, $R^2 = 0,94$.
4 Parameter: $f(x) = 16 - 23,8\,x + 11,6x^2 - 1,6x^3$, $R^2 = 1$.

Die letzte Folie

Ende.