

## „Analysis 1“

### Wiederholungsaufgaben

---

#### Aufgabe 1

Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Aussagen, d.h. entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Widerlegen Sie falsche Aussagen durch Angabe eines Gegenbeispiels.

- i) Die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit Periode  $2\pi$ .
- ii) Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  für eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  existiere und stimme mit  $f(c)$  überein für ein festes  $c \in (a, b)$ . Dann ist  $f$  auf  $(a, b)$  stetig.
- iii) Die Funktion  $\arctan$  besitzt Unstetigkeiten an den Stellen  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- iv) Jede streng monotone Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  ist unbeschränkt.
- v) Jede streng monotone Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(0)$  und  $f(1)$  an.

#### Aufgabe 2

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}, \quad \text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ik)^3}{3^k}.$$

#### Aufgabe 3

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge, die gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere reelle Folge. Beweisen Sie folgende Implikation mit Hilfe der Definition von Folgenkonvergenz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

#### Aufgabe 4

i) Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweisen Sie die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} \right| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

mit einer von  $x$  und  $y$  unabhängigen Konstanten  $L > 0$ . Finden Sie ein passendes  $L$ .

ii) Ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$  gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 5

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Funktionen stetig in  $x = 0$ ?

$$\begin{aligned} \text{i) } f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto & \begin{cases} \left( \alpha - \frac{4}{\exp(\exp(1/x))} \right)^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 2\alpha, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \\ \text{ii) } f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \alpha, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

#### Aufgabe 6

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$\text{i) } \int_{-\sqrt{\frac{18}{4}}}^{\sqrt{\frac{18}{4}}} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx, \quad \text{ii) } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (x - 1) \cdot e^{-x^2 - 1 + 2x} dx.$$