Mathematisches Institut
Prof. Dr. Matthias Kreck
Clemens Kienzler
Wintersemester 13/14

Analysis in mehreren Veränderlichen

Musterlösung zur Klausur vom 12. Februar 2014

Teil I

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Definieren Sie, was eine Cauchy Folge im $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung zu Aufgabe I.1

Eine Folge x_i für $i \in \mathbb{N}$ ist Cauchy Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k, l > n$ gilt:

$$||x_k - x_l|| < \epsilon$$

Aufgabe I.2 (8 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie den Zwischenwertsatz.

Lösung zu Aufgabe I.2

Satz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu jedem Wert z zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = z$.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Dann konstruieren wir induktiv mit Intervallschachtelung zwei Folgen x_i und y_i durch $x_0 = a$ und $y_0 = b$, und $x_{i+1} := (x_i + y_i)/2$ und $y_{i+1} := y_i$, falls $f((x_i + y_i)/2) < z$, sowie $x_{i+1} := x_i$ und $y_{i+1} := (x_i + y_i)/2$ sonst. Nach Konstruktion gilt:
- x_i ist monoton wachsend und y_i ist monoton fallend.
- $x_i < y_i$, insbesondere sind beide Folgen beschränkt durch a beziehungsweise b.
- $y_{i+1} - x_{i+1} = (y_i - x_i)/2$ und somit induktiv: $y_i - x_i = (b - a)/(2^i)$.

Da jede monotone beschränkte Folge eine Cauchy Folge ist und $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergieren beide Folgen. Da die Differenz eine Nullfolge ist, konvergieren beide gegen den gleichen Wert x. Da f stetig ist, konvergieren die Folgen $f(x_i)$ und $f(y_i)$ gegen $f(x)$. Wegen $f(x_i) \leq z \leq f(y_i)$ folgt

$$f(x) = z$$

□

Aufgabe I.3 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe I.3

Wurde gestrichen, kann man in jedem Lehrbuch nachlesen.

Aufgabe I.4 (12 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^n$.

Lösung zu Aufgabe I.4

Satz. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : A \to A$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt $0 \leq \lambda < 1$, so dass für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$||f(x) - f(y)|| \leq \lambda ||x - y||$$

Dann gibt es genau einen Fixpunkt $x \in A$, d.h.

$$f(x) = x$$

Beweis. Offensichtlich folgt, dass f stetig ist.
Sei $x_0 \in A$ beliebig und induktiv

$$x_{i+1} := f(x_i).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} ||x_{i+1} - x_i|| = ||f(x_i) - f(x_{i-1})|| &\leq \lambda ||f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})|| \\ &\leq ... \leq \lambda^i ||x_1 - x_0||. \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Teleskopsumme

$$||x_{n+m} - x_n|| = ||x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} - x_{n+m-2} + x_{n+m-2} ..... + x_{n+1} - x_n||,$$

woraus nach der Dreiecksungleichung folgt

$$||x_{n+m} - x_n|| \leq ||x_{n+m} - x_{n+m-1}|| + ||x_{n+m-1} - x_{n+m-2}|| + ... + ||x_{n+1} - x_n||.$$

Mit dem obigen folgt:

$$\begin{aligned} ||x_{n+m} - x_n|| &\leq (\lambda^{n+m-1} + \lambda^{n+m-2} + ... + \lambda^n) ||x_1 - x_0|| \\ &= \lambda^n (1 + \lambda + ... + \lambda^{m-1}) ||x_1 - x_0|| \\ &\leq \lambda^n (1 + \lambda + \lambda^2 + ...) ||x_1 - x_0|| = \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} ||x_1 - x_0|| \end{aligned}$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe benutzt haben. Dies ist eine Nullfolge, da $\lambda < 1$ ist. Für $\varepsilon > 0$ kann man also n so wählen, dass $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} ||x_1 - x_0|| < \varepsilon$ ist. Damit folgt für $k > n$ und $m > 0$:

$$||x_{k+m} - x_k|| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} ||x_1 - x_0|| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} ||x_1 - x_0|| < \varepsilon$$

Also ist x_i eine Cauchy Folge. Da A abgeschlossen und $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, konvergiert x_i gegen $x \in A$. Und es gilt wegen der Stetigkeit von f:

$$f(x) = lim_{i\to\infty} f(x_i) = lim_{i\to\infty} x_{i+1} = x,$$

da eine Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.
Nun müssen wir noch zeigen, dass der Fixpunkt x eindeutig ist. Sei y ein anderer Fixpunkt, dann gilt

$$||x-y|| = ||f(x) - f(y)|| \leq \lambda ||x-y||$$

und wegen $\lambda < 1$ folgt:

$$x = y.$$

□

Aufgabe I.5 (12 Punkte)

Formulieren Sie den Umkehrsatz im $\mathbb{R}^n$ und reduzieren Sie die Surjektivität auf den Banachschen Fixpunktsatz.

Lösung zu Aufgabe I.5

Satz. *Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und für ein $x \in U$ sei df_x invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen V von $x \in U$ und W von $f(x)$, so dass $f|_V : V \to W$ eine Diffeomorphismus ist (umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung g) und es gilt:*

$$dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}.$$

Beweis. Nach Komposition mit Verschiebungen kann man annehmen, dass $x = 0$ und $f(x) = 0$ ist. Nach Komposition mit $(df_0)^{-1}$ kann man zusätzlich annehmen, dass $df_0 = id$ ist.
Um die Surjektivität von f auf geeigneten Umgebungen von 0 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass wir die Gleichung $f(a) = b$ für jedes b in einer Umgebung von $f(0)$ durch ein a in der Umgebung von 0 lösen können. Dazu beutzen wir die Differenzierbarkeit von f bei $x = 0$, welche besagt, dass

$$b = f(a) = f(0) + df_0(a) + r(a) = a + r(a)$$

ist, wobei $lim_{||a||\to 0} \frac{r(a)}{||a||} = 0$ ist. Wir formulieren das um in die Gleichung

$$b - r(a) = a.$$

Somit ist die Gleichung

$$f(a) = b$$

äquivalent zur Ausage

$$T(a) = a,$$

wobei

$$T(x) := b - r(x)$$

ist. Das war die gesuchte Umformulierung zu einem Fixpunktproblem.

□

Aufgabe I.6 (4 + 8 Punkte)

a) Definieren Sie, was eine Hüllreihe zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist.

b) Definieren Sie, was es bedeutet, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue intergrierbar ist.

Lösung zu Aufgabe I.6

Definition. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine* **Hüllreihe** *zu f ist eine Funktion:*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_{Q_k}$$

mit beliebigen Quadern Q_k, $c_k \geq 0$ und $|f(x)| \leq g(x)$ für alle x.

Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt* **Lebesgue integrierbar** *oder kurz L-integrierbar, wenn es eine Folge f_i von Treppenfunktionen gibt, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine n gibt, so dass es für alle $m > n$ eine Hüllreihe $g_m = \sum_k c_{k,m} \chi_{Q_{k,m}}$ zu $f - f_m$ gibt, so dass*

$$I(g_m) := \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,m} vol(Q_{k,m}) < \varepsilon$$

ist.

Aufgabe I.7 (6 + 6 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

b) Formulieren Sie den Transformationssatz für Lebesgue Integrale.

Lösung zu Aufgabe I.7

Satz. *(Fubini) Seien $m < n$ natürliche Zahlen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ die Funktion*

$$\begin{aligned} g_y : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

L-integrierbar ist. Sei ferner die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n-m} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \int_{\mathbb{R}^m} g_y \end{aligned}$$

L-integrierbar, dann ist f L-integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} F.$$

Man drückt das auch so aus:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} (\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dx)dy$$

Satz. *(Transformationssatz) Sei $\varphi : U \to V$ ein* **Diffeomorphismus**, *d.h. eine bijektive in beiden Richtungen differenzierbare Abbilldung zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$. Sei $f : V \to \mathbb{R}^n$ L-integrierbar. Dann ist*

$$x \mapsto (f \circ \varphi)(x)|Det\ d\varphi_x| : U \to \mathbb{R}$$

L-integrierbar und es gilt

$$\int_U (f \circ \varphi)(x)|Det\ d\varphi_x| = \int_V f.$$

Aufgabe I.8 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Balles D^n.

Lösung zu Aufgabe I.8

Satz. *Sei $n \geq 2$. Dann gilt:*

$$vol(D^n) = \frac{2\pi}{n} vol(D^{n-2})$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Fubini an, indem wir $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ zerlegen:

$$vol(D^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D^n} = \int_{D^2} (vol(\sqrt{1 - ||x||^2}\ D^{n-2})dx.$$

Nach der Transformationsformel ist für eine messbare Mange $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$vol(rA) = r^n vol(A),$$

also

$$vol(D^n) = \int_{D^2} (\sqrt{1 - ||x||^2})^{n-2}\ vol(D^{n-2})dx = vol(D^{n-2}) \int_{D^2} (\sqrt{1 - ||x||^2})^{n-2}.$$

Nun verwenden wir den Transformationssatz mit den Polarkoordinaten

$$\varphi : (0,1) \times (0, 2\pi) \to D^2 - ([0,1] \times \{0\})$$

$$(r, \varphi) \mapsto r(cos(\varphi), sin(\varphi)).$$

Der Absolutbetrag der Determinante der Jacobimatrix ist r.

Indem wir beachten, dass wir eine Nullmenge heraus genommen haben, eine andere später wieder dazunehmen und sich das Integral dabei nicht ändert, erhalten wir

$$vol(D^n) = vol(D^{n-2}) \int_{D^2} (\sqrt{1 - ||x||^2})^{n-2} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{1 - r^2})^{n-2}\ r\ drd\varphi.$$

Eine Stammfunktion von $r(1 - r^2)^{(n-2)/2}$ ist $-(1/n)(1 - r^2)^{n/2}$. Also folgt:

$$vol(D^n) = vol(D^{n-2})\ 2\ \pi\ \left[-(1/n)(1 - r^2)^{n/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n}\ vol(D^{n-2}).$$

□

Korollar.

$$vol(D^{2n}) = \frac{1}{n!}\,\pi^n$$

$$vol(D^{2n+1}) = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!}\,\pi^n,$$

wobei

$$(2k+1)!! := 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)$$

ist.

Beweis. Induktionsanfang:

$$1 = vol(D^0) = \frac{1}{0!}\,\pi^0$$

$$2 = vol(D^1) = \frac{2^{0+1}}{(0+1)!!}\,\pi^0$$

Induktionsschritt:

$$vol(D^{2n}) = \frac{2\pi}{2n}\,vol(D^{2n-2}) = \frac{\pi\,\pi^{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{1}{n!}\,\pi^n$$

$$vol(D^{2n+1}) = \frac{2\pi}{2n+1}\,vol(D^{2n-1}) = 2\,2^n\,\frac{\pi\,\pi^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)!!} = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!}\,\pi^n$$

□

Teil II

Aufgabe II.1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

Lösung zu Aufgabe II.1

Wir berechnen zunächst die Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x$$

$$\Rightarrow Df = (3x^3 - 9y \qquad 3y^2 - 9x) \qquad \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$$

Einsetzen von $\frac{1}{3}x^2 = y$ in die zweite Gleichung ergibt

$$0 = 3\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2 - 9x = \frac{1}{3}x^4 - 9x = x\left(\frac{1}{3}x^3 - 9\right)$$

Das ist äquivalent zu entweder $x = 0$ oder $x = 3$.
Einsetzen in $\frac{1}{3}x^2 = y$ ergibt die kritischen Punkte $(0,0), (3,3)$.
$Hf = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$
$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$
$H_f(0,0)$ ist indefinit, da die Determinante der Untermatrix (0) gleich 0 ist. Andererseits ist $\det Hf_{(0,0)} = -81 \neq 0$. Also ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.
$Hf_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $Hf_{(3,3)}$ ist positiv definit, denn die Determinante der Untermatrix (18) ist $18 > 0$ und $\det Hf_{(3,3)} = 18^2 - 9^2 > 0$. Also ist bei $(3,3)$ ein lokales Minimum von f.

Aufgabe II.2 (12 Punkte)

Sei

$$g(x,y) := x - 3y + e^{xy} + 2$$

und $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(a,b) = 0$. Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Gleichung $g(x,y) = 0$ nahe (a,b) implizit nach einer der beiden Variablen aufgelöst werden kann und berechnen Sie gegebenfalls die Ableitung der implizit gegebenen Funktion. Ist die Lösungsmenge der Graph einer differenzierbaren Funktion (Begründung)?

Lösung zu Aufgabe II.2

Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g(x,y) = x - 3y + e^{xy} + 2$$

hat partielle Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + y\, e^{xy}$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -3 + x\, e^{xy}$$

Der Satz über implizite Funktionen ist anwendbar, wenn eine der Ableitungen nicht Null ist. Also existiert in der Nähe von (a,b) eine Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = y$ äquivalent ist zu $g(x,y) = 0$, wenn

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = -3 + a\, e^{ab} \neq 0$$

ist, und eine Funktion $h(y)$ mit der Eigenschaft , dass $f(y) = x$ äquivalent ist zu $g(x,y) = 0$, wenn

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = 1 + b\, e^{ab} \neq 0$$

ist. Die Ableitungen sind dann gegeben durch

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) = \frac{1 + f(x)\ e^{xf(x)}}{-3 + x\ e^{xf(x)}}$$

und

$$h'(y) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}(h(y), y)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}(h(y), y) = \frac{-3 + h(y)\ e^{h(y)y}}{1 + y\ e^{h(y)y}}.$$

Nun suchen wir nach einer Bedingung, mit der man entscheiden kann, ob die Lösungsmenge Graph eine differenzierbaren Funktion ist. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine Variable (x oder y) gibt, so dass man an jeder Stelle (x, y) mit $g(x, y) = 0$ nach der **gleichen** Variablen auflösen kann, d.h. wenn entweder für alle (a, b) mit $g(a, b) = 0$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

oder für alle (a, b) mit $g(a, b) = 0$ gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

ist. Dies führt in unserem Fall zu der richtigen Antwort, indem man die Ableitungen benutzt. Also ist die Lösungsmenge Graph einer Funktion, wenn das Gleichungssystem

$$x - 3y + e^{xy} + 2 = 0$$

$$1 + y\ e^{xy} = 0$$

keine Lösung hat oder das Gleichungssytem

$$x - 3y + e^{xy} + 2 = 0$$

$$-3 + x\ e^{xy} = 0$$

keine Lösung hat. Diese Gleichungen zu lösen war nicht Teil der Aufgabe.

Aufgabe II.3 (10 Punkte)

Sei

$$g(x, y) := e^y + y^3 + x^3 + x - 1.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung $g(x, y) = 0$ in der Nähe von 0 durch eine implizite Funktion $y = f(x)$ gegeben ist. Bestimmen Sie das Taylor Polynom von f um den Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 2.

Lösung zu Aufgabe II.3

Es ist $g(0, 0) = 1 - 1 = 0$, also erfüllt $(0, 0)$ Gleichung. Weiterhin ist g an der Stelle $(0, 0)$ stetig partiell differenzierbar als Verkettung von stetig partiell differenzierbaren Abbildung. Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^y + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$$

also existiert nahe $(0,0)$ eine differenzierbare impizite Funktion $y = f(x)$mit $g(x, f(x)) = 0$. Die Ableitung ergibt sich zu

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) = -\frac{3x^2+1}{e^{f(x)} + 3f(x)^2}$$

also $f'(0) = -1$.
Außerdem ist

$$f''(x) = \left(-\frac{3x^2+1}{e^{f(x)} + 3f(x)^2}\right)' = -\frac{(6x(e^{f(x)} + 3f(x)^2) - (3x^2+1)(f'(x)e^{f(x)} + 6f(x)f'(x))}{(e^{f(x)} + 3f(x)^2)^2}$$

also $f''(0) = -1$.
Damit ergibt sich für das Taylorpolynom zweiten Grades um 0:

$$T_2(x, 0) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = -x - \frac{1}{2}x^2$$

Aufgabe II.4 (10 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^5 - x^5y}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und $\partial_y \partial_x f(0,0)$ existieren, aber sind verschieden.

Lösung zu Aufgabe II.4

Die gemischten zweiten partiellen Ableitungen in der Null muss man mit der Definition berechnen, d.h. wir müssen den Differenzenquotienten

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h}$$

betrachten (und natürlich analog für $\partial_x \partial_y f(0,0)$).
Dazu brauchen wir zunächst $\partial_x f(0,h)$, $\partial_x f(0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(y^5 - 5x^4y)(x^4+y^4) - 4x^3(xy^5 - x^5y)}{(x^4+y^4)^2},$$

also ist $\partial_x f(0,h) = h$. In der Null müssen wir auch hier schon mit dem Differenzenquotienten arbeiten:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Damit ist

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

(Bemerkung: Dafür haben wir **nicht** $\partial_y \partial_x f(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ gebraucht!) Andererseits ist für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{(5xy^4 - x^5)(x^4+y^4) - 4y^3(xy^5 - x^5y)}{(x^4+y^4)^2},$$

also $\partial_y f(h,0) = -h$. Genau wie oben erhält man mit dem Differenzenquotienten $\partial_y f(0,0) = 0$. Damit sind wir fast fertig:

$$\partial_x \partial_y f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Insbesondere ist $\partial_y \partial_x f(0,0) = 1 \neq -1 = \partial_x \partial_y f(0,0)$.

Aufgabe II.5 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitung von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) := \int_\pi^x \frac{cos(xt)}{t} dt$$

mit Hilfe einer geeigneten Verkettung.

Lösung zu Aufgabe II.5

Definiere

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; g(x,y) := \int_\pi^x \frac{\cos(yt)}{t} dt$$

und

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; h(x) := (x,x).$$

Dann ist $f = g \circ h$. Die Kettenregel besagt nun, dass

$$f'(x) = \mathrm{d}g_{h(x)} \cdot h'(x).$$

Berechnen wir also diese Ableitungen. Die Funktion h wird einfach komponentenweise abgeleitet, d.h. $h'(x) = (1,1)$. Für g berechnen wir die partiellen Ableitungen:
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\partial_x g(x,y) = \frac{\cos(yx)}{x},$$

da das Integral bis x eine Stammfunktion von $\frac{\cos(yx)}{x}$ ist! Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\partial_y g(x,y) &= \int_\pi^x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos(yt)}{t} \right) dt = \int_\pi^x -\frac{sin(yt) \cdot t}{t} dt \\
&= -\int_\pi^x \sin(yt) dt = \frac{\cos(yt)}{y} \Big|_{t=\pi}^{t=x} \\
&= \frac{\cos(yx)}{y} - \frac{\cos(\pi y)}{y}.
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt alles zusammensetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \mathrm{d}g_{h(x)} h'(x) &= (\partial_x g(h(x)), \partial_y g(h(x))) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_x g(h(x)) + \partial_y g(h(x)) = \frac{\cos(x^2)}{x} + \frac{\cos(x^2)}{x} - \frac{\cos(\pi x)}{x} \\
&= 2\frac{\cos(x^2)}{x} - \frac{\cos(\pi x)}{x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe II.6 (10 Punkte)

Seien $U_1, U_2, ...U_k$ offen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\cap_{i=1}^k U_i$ offen ist. Gilt das auch für eine unendliche Folge offener Mengen $U_i,\ i \in \mathbb{N}$?

Lösung zu Aufgabe II.6

Sei $x \in \cap_{i=1}^k U_i \;\Rightarrow\; x \in U_i\ \forall i \in \{1, ..., k\}$. Da U_i offen existiert für jedes i ein $\varepsilon_i > 0$, sodass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$.
Sei nun $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\} > 0$. Damit ist $B_\varepsilon(x) \subset U_i$ für alle i. Also ist $\cap_{i=1}^k U_i$ offen.
Die Aussage gilt nicht für unendliche Schnitte: Betrachte $U_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$, dann ist U_i offen für alle i, aber $\cap_{i=1}^\infty U_i = \{0\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe II.7 (10 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar und U_i für $1 \leq i \leq k$ eine endliche offene Überdeckung von A. Zeigen Sie, dass

$$vol(A) \leq \sum_{i=1}^k vol(U_i)$$

ist.

Lösung zu Aufgabe II.7

Die U_i sind offen und damit messbar, $A \subset \cup_{i=1}^k U_i$ und damit $\chi_A(x) \leq \chi_{\cup_{i=1}^k U_i}(x) \leq \sum_{i=1}^k \chi_{U_i}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da die U_i nicht notwendigerweise disjunkt sind.

$$\Rightarrow\ vol(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\cup_{i=1}^k U_i} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k \chi_{U_i} = \sum_{i=1}^k vol(U_i)$$

da das Integral monoton und linear ist.

Aufgabe II.8 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_{D^2} \frac{1}{\sqrt{1 - ||x||^2}} dx.$$

Lösung zu Aufgabe II.8

Verwende Polarkoordinaten:

$$\begin{array}{rcc} \varphi\colon (0, 2\pi) \times (0, 1) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t, r) & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

Es gilt

$$Det\, d\varphi_{(t,r)} = r$$

Nun wenden wir die Transformationsregel an und beachten, dass man Mengen vom Maß 0 beim Integrieren vernachlässigen kann:

$$\int_{D^2} \frac{1}{\sqrt{1- \parallel x \parallel^2}} = \int_{(0,2\pi)\times(0,1)} r \, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, drdt$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, dr$$

Stammfunktion von $r \, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ ist:

$$-\sqrt{1-r^2}$$

Also

$$\int_{D^2} \frac{1}{\sqrt{1- \parallel x \parallel^2}} = 2\pi \int_0^1 r \, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \, dr = -2\pi \left[\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 = 2\pi.$$