Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Angkana Rüland
Wintersemester 13/14

universitätbonn

Analysis I

Übungsblatt Nr.7 — Abgabe vor der Vorlesung am 02.12.2013

Aufgabe 25 (Exponentialfunktion)

In dieser Aufgabe geht es um Eigenschaften der Exponentialfunktion.

a) Zeigen Sie die folgende Konvergenz: $\lim\limits_{n\to\infty} n|\exp(\frac{ix}{n}) - 1| = |x|$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

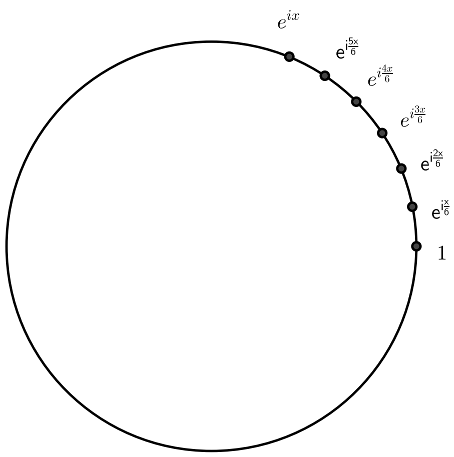
$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

stetig ist. Skizzieren Sie außerdem diese Funktion.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, d.h. mit den Identitäten $\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$ und $\exp(1) = e$, dass $\exp(q) = e^q$ für $q \in \mathbb{Q}$.

Tipp zu c): Zeigen Sie die Aussage zunächst für $q \in \mathbb{N}$ und benutzen Sie dann Aufgabe 13 um dies auch für $q \in \mathbb{Q}$ zu zeigen.

Bemerkung: Die unter a) gezeigte Aussage ermöglicht eine Approximation des Bogenmaßes. Wenn wir den Abstand zwischen dem Punkt e^{ix} und 1 auf dem Einheitskreis messen wollen, können wir eine äquidistante Zerlegung des Kreisbogens bilden. Die Zwischenpunkte haben dann die Form $e^{i\frac{kx}{n}}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $0 < k < n$. Der Abstand zwischen benachbarten Zwischenpunkten ist durch $|e^{i\frac{x}{n}} - 1|$ gegeben. Insgesamt ergibt sich als Approximation des Gesamtabstands auf dem Kreis $n|e^{i\frac{x}{n}} - 1|$. Aufgabenteil a) zeigt also, dass diese Approximation konvergiert.



Aufgabe 26 (Folgen)

Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Folgen konvergieren.

a) Sei $q \in (0,1)$ und $a_n := \sum_{j=1}^{n} 2^{\frac{1}{j}} q^j$.

b) Seien $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$.

c) Seien $b > 0$, $a_1 \in (0, \frac{1}{b})$ und $a_{n+1} := 2a_n - ba_n^2$.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!
Tipp: Es ist möglich, dass Sie die Grenzwerte der konvergenten Folgen *nicht* erraten können. Verwenden Sie deshalb Kriterien wie z.B. Monotonie oder die Cauchy-Eigenschaft, um die Konvergenz in diesen Fällen nachzuweisen.

Aufgabe 27 (Stetigkeit I)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \text{ für rationales } x, \\ 0 \text{ für irrationales } x. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f genau in $x = 0$ stetig ist (insbesondere nirgends sonst). Skizzieren Sie außerdem diese Funktion.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt in $[a,b]$ hat, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 28 (Stetigkeit II)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Wenn f und g stetig in a sind, dann gilt dies auch für

$$h(x) := \max\{f(x), g(x)\} \text{ und } k(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

- f ist genau dann stetig in a, falls $|f|$ stetig in a ist.
- f, g sind genau dann stetig in a, falls $f \cdot g$ stetig in a ist.

Hinweis: Beweisen Sie alle richtigen (Teil-)Aussagen und geben Sie Gegenbeispiele zu allen falschen Behauptungen. Beweisen Sie insbesondere die richtigen Implikationen in den Äquivalenzen; so könnte beispielsweise bei einer falschen Äquivalenz immer noch eine Implikationsrichtung wahr sein.

Hinweis: Begründen Sie bei allen Aufgaben alle Ihre Behauptungen sorgfältig!