
Analysis in mehreren Veränderlichen

Übungsblatt 11

Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 17. Januar 2012

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Die Gammafunktion ist für $s > 0$ definiert durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Zeigen Sie:

- Was bedeutet die Aussage, das Integral existiert für alle $s > 0$? Zeigen Sie: Das Integral existiert für alle $s > 0$.
- Für $s > 1$ gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
- Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(k+1) = k!$.
- Es ist $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Sei $h > 0$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Der n -dimensionale Kegel mit Basis A und Spitze $\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix}$ sei gegeben durch

$$C := \left\{ (1-t) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix} \mid a \in A, t \in [0, 1] \right\}.$$

Er hat durch die Definition die Höhe h .

Zeigen Sie: $|C|_n = \frac{h}{n} |A|_{n-1}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 43 (10 Punkte)

- a) Ein regulärer Tetraeder ist ein Tetraeder, dessen vier Ecken jeweils gleiche Abstände voneinander haben. Da ein Tetraeder flache Seiten besitzt, hat der Begriff der Oberfläche eine offensichtliche Bedeutung - welche ist das?

Berechnen Sie das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen.

Hinweis: Ein Tetraeder ist ein Kegel. Sie müssen also die Höhe und den Flächeninhalt einer Seite bestimmen.

- b) Sei W ein vierdimensionaler Würfel der Kantenlänge 3 und

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, \dots, x_4 \geq 0 \text{ und } x_1 + \dots + x_4 < 1 \right\}$$

ein vierdimensionaler Simplex.

Berechnen Sie $|W|_4$ und $|S|_4$.

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Skizzieren Sie kurz das Verfahren des Archimedes zur Bestimmung der Kreiszahl π und legen Sie möglichst vollständig dar, welche Annahmen an den Flächeninhalt eingehen.