

Zusammenfassung der Vorlesung
Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Herbert Koch
Universität Bonn
Sommersemester 2019

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

- L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS Graduate Studies in Mathematics 19
- F. John, Partial Differential Equations, Springer
- J. Jost, Partielle Differentialgleichungen, Springer

Dieses Skript basiert auf den Skripten von Prof. Müller (SS 2009), Prof. Szekelyhidi (SS 2010), Prof. Niethammer (2014) und Prof. Conti (2015) und einer Vorlesung im SS 2019 und ist teils wörtlich übernommen.

Tippfehler und Korrekturen bitte an koch@math.uni-bonn.de oder in der Sprechstunde.

Diese Zusammenfassung ist nur für Hörer der Vorlesung V2B2 EPDE an der Universität Bonn, Sommersemester 2019, bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Partielle Differentialgleichungen	3
1.2	Ein wichtiges Beispiel: die Wärmeleitungsgleichung	5
2	Harmonische Funktionen und die Poisson Gleichung	6
2.1	Einführung	6
2.2	Maß, Integration und der Satz von Gauß	7
2.3	Eigenschaften harmonischer Funktionen	10
2.3.1	Definition	10
2.3.2	Mittelwerteigenschaft	10
2.3.3	Regularität	12
2.3.4	Maximumprinzip	14
2.4	Explizite Lösung der Poissongleichung	18
2.4.1	Fundamentallösung, Laplacegleichung im Ganzraum .	18
2.4.2	Greensche Funktion	22
2.4.3	Spezialgebiete	26
2.5	Existenz von Lösungen	34
2.6	Harmonische Polynome und Kugelflächenfunktionen	41
2.6.1	Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten	41
2.6.2	Harmonische Polynome	43
2.6.3	Orthonormalbasen in H_m^d	46
2.6.4	Der Fall $d = 2$	46
2.6.5	Der Fall $d = 3$ und $m \geq 1$	47
2.7	Holomorphe Funktionen und komplexe Differentialgleichungen	51
2.7.1	Wege und Zusammenhang	51

1 Einleitung

1.1 Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen (abgekürzt 'PDG' oder nach dem englischen 'partial differential equations' als 'PDE' bezeichnet) sind Gleichungen, die eine Funktion mehrerer Variablen, sowie deren partielle Ableitungen enthalten. Die Ordnung der Differentialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Gleichung auftaucht.

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige glatte (d.h. für uns, dass alle Ableitungen, die wir benötigen, existieren und stetig sind) Funktion auf Ω . Wir benutzen die folgenden Notationen für partielle Ableitungen. Die i -te partielle Ableitung von u ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.1)$$

und wird auch mit

$$\partial_{x_i} u, \quad \partial_i u, \quad D_i u, \quad u_{x_i} \quad u_i$$

abgekürzt. Ebenso schreiben wir partielle Ableitungen zweiter Ordnung als

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u, \quad \partial_{x_i x_j}^2 u, \quad \partial_{ij}^2 u, \quad u_{x_i x_j}, \quad u_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.2)$$

Allgemein definiert man für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, mit Ordnung $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

$$D^\alpha u(x) = \partial^\alpha u(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u \quad (1.3)$$

Für spätere Zwecke führen wir hier noch die Notation $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$, sowie $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ ein. Mit

$$D^k u(x) = D^\alpha u(x); |\alpha| = k \quad (1.4)$$

bezeichnen wir die Menge aller partiellen Ableitungen der Ordnung k . Wichtige Spezialfälle sind die (totale) erste Ableitung

$$Du = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u),$$

und der Gradient,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

sowie die Hesse matrix

$$D^2u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1x_1}^2 u & \cdots & \partial_{x_nx_1}^2 u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1x_n}^2 u & \cdots & \partial_{x_nx_n}^2 u \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Der Satz von Schwarz impliziert dass die Hessematrix symmetrisch ist falls u zweimal stetig differenzierbar ist.

Eine partielle Differentialgleichung k -ter Ordnung läßt sich nun schreiben als

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, u, x) = 0. \quad (1.7)$$

Als wichtigste Beispiele werden wir im nächsten Abschnitt die Wärmeleitungsgleichung, sowie die Poisson-Gleichung, etwas ausführlicher motivieren. Weitere bekannte Beispiele sind

- (i) Die Helmholtz-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\Delta u + \mu u = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}_+,$$

wobei

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}^2 u. \quad (1.8)$$

- (ii) Die Minimalflächengleichung $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0.$$

wobei $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^d \partial_i v_i$.

- (iii) Die Wellengleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_{tt} - \Delta u = f.$$

- (iv) Die (viskose) Burgers-Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nu \geq 0$

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad \text{wobei } \nu \geq 0.$$

- (v) Die Korteweg-de-Vries Gleichung $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

- (vi) Die stationäre Schrödingergleichung in \mathbb{R}^d . Gegeben $V \in C(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$-\Delta u + Vu = \lambda u$$

1.2 Ein wichtiges Beispiel: die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung ist die einfachste Gleichung, welche die Ausbreitung von Stoffen durch Diffusion beschreibt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt. Sei $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Massendichte eines Stoffes (d.h. $u(t, x)$ ist die Dichte im Raumpunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t). Sei

$$j : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.9)$$

die Flußdichte des Stoffes, d.h. der Gesamtfluß des Stoffes durch eine Hyperfläche A mit Normale ν ist durch $\int_A j \cdot \nu dS$ gegeben. Sei schließlich $f : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Produktionsrate des Stoffes. Dann gilt für jedem Ball $B_r(x) \subset \Omega$ und jedes t

$$\frac{d}{dt} \int_{B_r(x)} u dy = - \int_{\partial B_r(x)} j \cdot \nu dS + \int_{B_r(x)} f dy \quad (1.10)$$

wobei das linke Integral die Gesamtmasse in $B_r(x)$, das linke Integral auf der rechten Seite den Massenabfluß und das zweite Integral die Massenproduktion in $B_r(x)$ beschreibt. Mit dem Satz von Gauss (und der Vertauschung von Integration und Differentiation) folgt

$$\int_{B_r(x)} u_t dy = \int_{B_r(x)} (-\operatorname{div} j + f) dy. \quad (1.11)$$

Da dies für alle Bälle mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ gilt, folgt (für $u \in C^1$, $j \in C^1$, $f \in C$)

$$\partial_t u + \operatorname{div} j - f = 0 \quad \in (0, T) \times \Omega \quad (1.12)$$

Diese Gleichung heißt Bilanzgleichung oder Erhaltungssatz, weil sie die Erhaltung der Masse bzw. die Massebilanz beschreibt. Diese Bilanzgleichung gilt unabhängig von dem konkreten Stoff, den wir betrachten. Um eine Gleichung für u zu gewinnen, fehlt noch eine Beziehung zwischen j und u (diese hängt von dem konkreten Stoff ab). Im einfachsten Fall ist j zu ∇u proportional,

$$j = -D \nabla u. \quad (1.13)$$

Die Konstante D heißt Diffusionskoeffizient. Es gilt $D > 0$, da der Fluß von Gebieten hoher Massedichte zu solchen niedriger Massedichte erfolgt. Setzt man der Einfachheit halber $D = 1$ so ergibt sich die Gleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad (1.14)$$

Lösungen der Gleichung $-\Delta v = f$ entsprechen gerade stationären Masseverteilungen, d.h. $u(t, x) = v(x)$ ist eine Lösung von (1.14) Statt der Diffusion von Stoffen kann man auch die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem Stoff betrachten. In diesem Fall ist u die Temperatur, j der Wärme fluß und f die Wärmezufuhr. Die im Ball $B_r(x)$ gespeicherte Energie ist

$\int_{B_r(x)} cu \, dy$, wobei die Konstante c die spezifische Wärmekapazität (Energie/ Temperatur \times Volumen) des Stoffes ist. Die zugehörige Bilanzgleichung ist

$$\partial_t(cu) = -\operatorname{div} j + f \quad (1.15)$$

und mit $j = -D\nabla u$ und $c = 1$, $D = 1$ ergibt sich wieder (1.14). In den folgenden Kapiteln werden wir uns zunächst mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, dann mit der Gleichung $-\Delta u = f$, der sogenannten Poisson-Gleichung, beschäftigen und insbesondere zunächst mit dem Spezialfall $f = 0$.

2 Harmonische Funktionen und die Poisson Gleichung

2.1 Einführung

Die Poissongleichung

$$\Delta u = f$$

ist das wichtigste Beispiel elliptischer Differentialgleichungen. Beispiele sind

- (i) Voll nichtlineare elliptische Gleichungen

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0 \quad \text{in } U \subset \mathbb{R}^d$$

wobei F eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ist. Die Strukturannahme der Elliptizität ist

$$D_A F(A, p, u, x) B \geq c \|B\|$$

für alle positiv semi definiten Matrizen B . $D_A F$ bezeichnet die totale Ableitung nach der ersten Komponenten (die eine $d \times d$ Matrix ist).

- (ii) Die Helmholtzgleichung und die Minimalflächengleichung sind elliptische Gleichungen.
 (iii) Weitere Beispiele sind die Monge-Amperegleichung

$$\det D^2u = f$$

wobei V die Menge der positiv definiten Matrizen ist und $f > 0$. Eine Variante ist die Gleichung der vorgeschriebenen Gaußkrümmung

$$\det D^2u = f(1 + |Du|^2)^{d/2}$$

Der Graph der Lösung hat die Gaußkrümmung $f(x)$ im Punkt $(x, u(x))$.

- (iv) Das elektrische Potential u eines stationären elektrischen Feldes im Vakuum ist harmonisch, d.h.

$$\Delta u = 0$$

- (v) Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 . Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist genau dann komplex linear, wenn es eine Drehstreckung ist:

$$\begin{aligned} a * b &= (\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b - \operatorname{Im} a \operatorname{Im} b) + i(\operatorname{Re} a \operatorname{Im} b + \operatorname{Im} a \operatorname{Re} b) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} b \\ \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ offen, $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig differenzierbar mit komplex linearer Ableitung, d.h. die Jacobimatrix

$$Du = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} u & \partial_y \operatorname{Re} u \\ \partial_y \operatorname{Im} u & \partial_x \operatorname{Im} u \end{pmatrix}$$

ist eine Drehstreckung, i. e. es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x \operatorname{Re} u = \partial_y \operatorname{Im} u, \quad \partial_y \operatorname{Re} u = -\partial_x \operatorname{Im} u.$$

Dann sind sowohl $\operatorname{Re} u$ wie auch $\operatorname{Im} u$ harmonische Funktionen. Wir zeigen dies unter der zusätzlichen Annahme, dass u zweimal stetig differenzierbar ist. Dann ist

$$\partial_x^2 \operatorname{Re} u + \partial_y^2 \operatorname{Re} u = \partial_x(\partial_y \operatorname{Im} u) - \partial_y(\partial_x \operatorname{Im} u) = 0.$$

Das Studium der Poissongleichung ist ein erster wesentlicher Schritt zum Verständnis einer großen Klasse von Gleichungen.

2.2 Maß, Integration und der Satz von Gauß

In diesem Abschnitt betrachten wir Grundlagen aus der Analysis I-III.

- (i) Ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) ist eine Menge X mit einer Sigmaalgebra \mathcal{A} von Mengen von X und einem Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$.
- (ii) Eine meßbare Funktion ist eine Abbildung $X \rightarrow [-\infty, \infty]$ für die $\{x : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (iii) Für nichtnegative meßbare Funktionen g ist das Integral durch

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt$$

definiert. Eine meßbare Funktion heißt integrierbar, wenn $\int |f| d\mu < \infty$. In diesem Fall definieren wir

$$\int_X f d\mu = \int_X \max\{f, 0\} d\mu - \int_X \max\{-f, 0\} d\mu.$$

Das Integral ist linear, additiv in der Integrationsmenge und es gelten eine Reihe von Konvergenzsatz: Satz Beppo Levi, Lemma von Fatou und der Konvergenzsatz von Lebesgue.

- (iv) Das Lebesguemaß m^d ist das eindeutig bestimmte vollständige Maß auf \mathbb{R}^d , das translationsinvariant ist, das auf jeder offenen Menge (und daher auf jeder Borelmenge) definiert ist, mit $m^d([0, 1]^d) = 1$.
- (v) Es gilt für den Ball mit Radius R um Null, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^d(B_R(0)) = R^d m^d(B_1(0))$$

- (vi) Ist f integrierbar auf $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ so ist $x_2 \rightarrow f(x_1, x_2)$ für fast jedes x_1 integrierbar m^{d_2} integrierbar, $x_1 \rightarrow \int f(x_1, x_2) dm^{d_2}$ ist m^{d_1} integrierbar (die Nullmenge ist irrelevant), und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, x_2) dm^d(x_1, x_2)$$

- (vii) Mit diesen Eigenschaften läßt sich das Maß der Einheitskugel bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dm^d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{-|x_1|^2} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-|x_2|^2} dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} e^{-|x_1|^2} dm^{d_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}^{d_2}} e^{-|x_2|^2} dm^{d_2}(x_2) \\ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dm^d(x) &= \int_0^\infty m^d(\{x : e^{-|x|^2} > t\}) = \int_0^1 m^d(B_{(-\ln t)^{\frac{1}{2}}}(0)) dt \\ &= m^d(B_1(0)) \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{d}{2}} dt \\ &= m^d(B_1(0)) \int_0^\infty s^{\frac{d}{2}} e^{-s} ds \\ &= m^d(B_1(0)) \Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dm^2 = \pi, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{d}{2}},$$

$$\Gamma(1/2) = \frac{1}{2} \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}.$$

(viii) Die Transformationsformel. Ist $U \subset \mathbb{R}^d$, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f(y) dm^d(y) = \int_U f \circ \phi(y) |\det D\phi(x)| dm^d(x) \quad (2.1)$$

(ix) Hausdorffmaß und Integration über Untermannigfaltigkeiten. Das s dimensionale Hausdorffmaß \mathcal{H}^s ist ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen. Im Fall $s = d$ stimmt es mit dem Lebesguemaß überein. Auf n dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M^n ist die Einschränkung ein Maß auf der Untermannigfaltigkeit, das ein Integral

$$\int_{M^n} f d\mathcal{H}^n$$

definiert.

(x) Die Areaformel. $n \geq d$ und $\phi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ injektiv so gilt

$$\int_{\phi(U)} f d\mathcal{H}^d = \int_U f \circ \phi (\det D\phi^T D\phi)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^d \quad (2.2)$$

Damit kann man das Maß des Einheitsballes mit Hilfe von Polarkoordinaten bestimmen.

(xi) Die Coareaformel. Ist $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $d \geq n$ so gilt

$$\int_U f (\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}} dm^d = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\phi^{-1}(t)} f(x) d\mathcal{H}^{d-n} dm^n(t) \quad (2.3)$$

Genauer: Ist $f (\det D\phi D\phi^T)^{\frac{1}{2}}$ integrierbar, so ist für fast alle t f auf $\phi^{-1}(t)$ \mathcal{H}^{d-n} integrierbar.

Beispiel: $n = d - 1$, $\phi(x) = |x|$, $D\phi D\phi^T = 1$ und

$$m^d(B_1(0)) = \int_0^1 \mathcal{H}^n(\partial B_t(0)) = \mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{S}^{d-1}) \int_0^1 t^{n-1} dt \quad (2.4)$$

und daher

$$\mathcal{H}^{d-1}(\mathcal{S}^{d-1}) = dm^d(B_1(0)).$$

Insbesondere ist die Länge des Einheitskreises 2π . Hier kann man alternativ Polarkoordinaten verwenden und erhält diese Identität mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini.

(xii) Der Satz von Gauß. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene beschränkte Menge, deren Rand ∂U eine C^1 Untermannigfaltigkeit M^{d-1} enthält. Ω liege lokal immer auf einer Seite von M . Es gelte $\mathcal{H}^{d-1}(\partial U) < \infty$ und $\mathcal{H}^{d-1}(\partial U \setminus M^{d-1}) = 0$. Sei ν die äußere Einheitsnormale. Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{U}, \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} F$ integrierbar, so gilt

$$\int \operatorname{div} F dm^d = \int_{M^{d-1}} F \cdot \nu d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.5)$$

Wir schreiben in der Regel

$$\int_U \dots dx$$

für das Integral bzgl. des Lebesguemasses.

Definition 2.1. Sei (X, \mathcal{S}, μ) ein Maßraum, $E \in \mathcal{S}$ mit $0 < \mu(E) < \infty$, u integrierbar. Dann definieren wir:

$$\int_E u d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u d\mu. \quad (2.6)$$

2.3 Eigenschaften harmonischer Funktionen

2.3.1 Definition

Definition 2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die Funktion u heißt harmonisch wenn $\Delta u = 0$ auf Ω . Dabei $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$.

Beispiele:

- (i) Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Die Funktion $x \mapsto x \cdot Ax$ ist genau dann in \mathbb{R}^d harmonisch, wenn $\text{Tr } A = 0$ (die Spur von A). Insbesondere sind $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$ und $x \mapsto x_1 x_2$ in \mathbb{R}^d harmonisch.
- (ii) $x \mapsto \ln|x|$ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonisch, für $n \geq 3$ ist $x \mapsto |x|^{2-d}$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ harmonisch.

2.3.2 Mittelwerteigenschaft

Satz 2.3 (Mittelwerteigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$, $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$.

(i) Falls $\Delta u = 0$ in Ω , dann gilt

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{B_r(x)} u dx. \quad (2.7)$$

(ii) Falls $-\Delta u \leq 0$ in Ω , dann gilt

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.8)$$

und

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u(y) dy. \quad (2.9)$$

(iii) Falls $-\Delta u < 0$ in Ω , dann gilt

$$u(x) < \int_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.10)$$

und

$$u(x) < \int_{B_r(x)} u(y) \, dy. \quad (2.11)$$

Beweis. Wir beweisen zuerst (2.8). Sei $\varphi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(\rho) = \int_{\partial B_1(0)} u(x + \rho z) \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) \quad (2.12)$$

definiert. Die Funktion φ ist stetig (Konvergenzsatz von Lebesgue), $\varphi(0) = u(x)$ und für $\rho > 0$ gilt

$$\varphi(\rho) = \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, d\mathcal{H}^{d-1}(y). \quad (2.13)$$

Die Funktion φ ist in allen $\rho \in (0, r)$ differenzierbar (Differenzenquotient, Konvergenzsatz von Lebesgue oder gleichmässige Konvergenz des Differenzenquotienten), und

$$\frac{d}{d\rho} \varphi(\rho) = \int_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot z \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_1(0)} Du(x + \rho z) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{d-1}(z) \quad (2.15)$$

$$= \frac{\rho}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0))} \int_{B_1(0)} (\Delta u)(x + \rho z) \, dx \geq 0. \quad (2.16)$$

Hier wurde den Satz von Gauß benutzt, und

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i u(x + \rho z) = \rho \sum_i D_i D_i u(x + \rho z) = \rho \Delta u(x + \rho z) \quad (2.17)$$

gerechnet. Aus $-\Delta u \leq 0$ folgt, dass φ monoton wachsend ist. Da φ stetig ist, folgt $u(x) = \varphi(0) \leq \varphi(r)$ und (2.8) ist bewiesen.

(2.9) folgt mit der Coareaformel (2.4) mit $\phi(x) = |x|$ im ersten und letzten Schritt

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u \, dx &= \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \, ds \\ &\geq u(x) \int_0^r \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_s(x)) \, ds \\ &= u(x) m^d(B_r(x)) \end{aligned}$$

Der Beweis impliziert (iii) indem wir jeweils \leq durch $<$ ersetzen. Für (i) wenden wir (ii) auf u und $-u$ an. \square

Satz 2.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Die drei Eigenschaften

(i) u ist harmonisch, d.h.,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (2.18)$$

(ii) u erfüllt die sphärische Mittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.19)$$

für alle (x, r) mit $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$,

(iii) u erfüllt die Ballmittelwerteigenschaft, d.h.,

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u \, dy \quad (2.20)$$

für alle Bälle $B_r(x) \subset \Omega$,

sind äquivalent.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) folgt aus Satz 2.3.

(ii) \Rightarrow (iii) folgt aus

$$\int_{B_r(x)} u \, dy = \int_{[0,r]} \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \right) d\mathcal{L}^1(\rho) \quad (2.21)$$

$$= \int_{[0,r]} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho(x)) u(x) d\mathcal{L}^1(\rho) = u(x) \mathcal{L}^d(B_r(x)). \quad (2.22)$$

(vgl. (2.4)).

(iii) \Rightarrow (i) wird durch Widerspruch bewiesen. Sei $x \in \Omega$, so dass $\Delta u(x) \neq 0$. Wir können oBdA annehmen, dass $\Delta u(x) > 0$ (sonst betrachten wir $-u$). Dann gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(x) \subset \Omega$ und $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$. Dann folgt aus Satz 2.3(iii), dass

$$u(x) < \int_{B_r(x)} u \, dy, \quad (2.23)$$

entgegen der Annahme. \square

2.3.3 Regularität

Die Funktion f auf \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Damit ist auch

$$g(x) = f(1 - 4|x|^2)$$

beliebig oft differenzierbar mit Träger $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$. Die Funktion g ist positiv im Inneren. Wir definieren

$$\eta(x) = \frac{g(x)}{\int g dx}.$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, mit Träger in $\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$, radial, radial fallend, mit Integral 1. Wir definieren die Funktion

$$\eta_r = r^{-d} \eta(x/r) \quad (2.24)$$

deren Integral wieder 1 ist.

Lemma 2.5. *Die Funktion u sei integrierbar und erfülle die Mittelwert-eigenschaft, d.h.,*

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u dy \quad (2.25)$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Dann folgt

$$u(x) = (u * \eta_r)(x) \quad (2.26)$$

für alle $B_r(x) \subset \Omega$.

Beweis.

$$\begin{aligned} (u * \eta_r)(x) &= \int_{\Omega} u(y) \eta_r(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \int_0^{\eta_r(x-y)} dt dy \\ &= \int_{\{(t,x): 0 \leq t \leq \eta_r(x-y)\}} u(y) dm^{d+1}(y, t) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\{\eta_r(x-y) > t\}} u(y) dm(y) dt \\ &= u(x) \int_0^{\infty} m^d(\{y : \eta_r(x-y) > t\}) dt \\ &= u(x) \int \eta_r dy \\ &= u(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei wir mehrfach Fubini und in der fünften Gleichung die Mittelwert-eigenschaft verwendet haben. \square

Satz 2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Falls*

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u dm^d \quad (2.28)$$

für alle Bälle $B_r(x) \subset \Omega$, dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega. \quad (2.29)$$

Insbesondere ist jede harmonische Funktion beliebig oft differenzierbar.

Beweis von Satz 2.6. Sei $x \in \Omega$, $r > 0$, so dass $B_{2r}(x) \subset \Omega$. Dann gilt

$$u(y) = \int_{B_{2r}(x)} u(z) \eta_r(z-y) dz \quad (2.30)$$

für alle $y \in B_r(x)$. Aus $\eta_r \in C_0^\infty$ folgt (mit Differenzenquotienten und dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz), dass u differenzierbar ist und

$$|\partial_i u(x)| = r^{-1} \left| \int_{B_r(x)} u(y) r^{-n} (\partial_i \eta) \left(\frac{x-y}{r} \right) dy \right| \leq r^{-1} \int |\partial_i \eta| dy \|u\|_{C_b(B_r(x))}. \quad (2.31)$$

Wir können das Argument iterieren und sehen, dass u beliebig oft differenzierbar ist. Insbesondere ist u zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Mittelwertegenschaft. Nach Satz 2.4 ist u harmonisch.

Da jede harmonische Funktion auf einer kleineren Menge integrierbar ist können wir die erste Aussage auf harmonische Funktionen anwenden. \square

Satz 2.7 (Liouville). Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis. Sei $M = \sup |u|(\mathbb{R}^d)$. Nach (2.31) gilt

$$|\partial_{x_i} u(x)| \leq r^{-1} \int |\partial_{x_i} \eta| dy \|u\|_{sup}$$

Da r beliebig ist, folgt $Du(x) = 0$. \square

2.3.4 Maximumprinzip

Definition 2.8. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ heißt zusammenhängend, wenn für alle offene Mengen $A, B \subset U$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = U$ gilt: $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Bemerkung. Eine offene Menge U in \mathbb{R}^d ist genau dann zusammenhängend, wenn zu jedem Paar $x, y \in U$ eine Kurve $\varphi \in C([0, 1], U)$ existiert, so dass $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$. Die Kurve darf auch in C^∞ gewählt werden. Jeder Punkt einer offenen Mengen liegt in einer maximalen zusammenhängenden offenen Teilmenge. Derartige Teilmengen heißen Zusammenhangskomponenten.

Satz 2.9 (Schwach Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, so dass

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u \, dy \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega. \quad (2.32)$$

Dann gilt

$$u(x) \leq \max u(\partial\Omega) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

Insbesondere nehmen harmonische Funktionen das Maximum auf dem Rand an.

Beweis. Das ist eine Konsequenz der Mittelwerteigenschaft. Sei x_0 ein Punkt im Inneren in dem ein Maximum angenommen wird. Nach der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(x_0) \leq \int_{B_r(x_0)} u(y) \, dy = u(x_0) + \int_{B_r(x_0)} (u(y) - u(x_0)) \, dy$$

und damit

$$\int_{B_r(x_0)} |u(y) - u(x_0)| \, dy = 0$$

Insbesondere gilt das auch für den maximalen Ball in Ω , der den Rand berührt. Aufgrund der Stetigkeit folgt die Behauptung. \square

09.04.2019

Bemerkung. Falls u harmonisch ist, dann gilt auch

$$\min u(\overline{\Omega}) = \min u(\partial\Omega). \quad (2.33)$$

Satz 2.10 (Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so dass

$$\Delta u = \Delta v \text{ in } \Omega \quad (2.34)$$

$$u = v \text{ auf } \partial\Omega. \quad (2.35)$$

Dann gilt $u = v$.

Beweis. Die Funktion $w = u - v$ ist harmonisch, und gleich null auf $\partial\Omega$. Deshalb gilt $w = 0$ in Ω . \square

Satz 2.11 (Starkes Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt, zusammenhängend. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$, so dass

$$u(x) \leq \int_{B_r(x)} u \, dy \text{ für alle } B_r(x) \subset \Omega. \quad (2.36)$$

Dann gilt entweder

(i) $u(x) < \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$ für alle $x \in \Omega$

oder

(ii) Die Funktion u ist konstant auf Ω .

Bemerkung. Falls $u \in C^2(\Omega)$, dann kann die Annahme (2.36) durch $-\Delta u \leq 0$ in Ω ersetzt werden (Satz 2.3(ii)).

Beweis. Sei $M = \max u(\bar{\Omega})$, $V = \Omega \cap u^{-1}(M) = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$.

Sei $x \in V$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus der Mittelwerteigenschaft folgt, $B_r(x) \subset V$. Deshalb ist V offen.

Da u stetig ist, ist auch die Menge $\Omega \setminus V = \{x \in \Omega : u(x) \neq M\}$ offen. Da Ω zusammenhängend ist, gilt $V = \emptyset$ (Option (i)) oder $V = \Omega$ (Option (ii)). \square

Zur Vereinfachung der Notation sei

$$\omega_d = m^d(B_1(0)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}. \quad (2.37)$$

Satz 2.12 (Harnack-Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, V nichtleer, offen, beschränkt, zusammenhängend, mit $\bar{V} \subset \Omega$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, so dass*

$$\sup u(V) \leq c \inf u(V) \quad (2.38)$$

für alle $u \in C^2(\Omega)$ die $\Delta u = 0$ und $u \geq 0$ auf Ω erfüllen.

Beweis. Sei

$$r = \frac{1}{4} \min\{\text{dist}(V, \partial\Omega) > 0, 1\}. \quad (2.39)$$

Da \bar{V} kompakt ist können wir es mit endlichen vielen Bällen $B_r(x_j)$, $1 \leq j \leq N$ überdecken. Wir betrachten zuerst zwei Punkte $x, y \in B_r(x_j)$, mit $|x - y| < r$. Aus der Mittelwerteigenschaft, $B_r(x) \subset B_{2r}(y) \subset \Omega$ und $u \geq 0$ folgt

$$u(x) = \int_{B_r(x)} u dy = \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x)} u dy \quad (2.40)$$

$$\leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_{2r}(y)} u dy \quad (2.41)$$

$$= 2^d \int_{B_{2r}(y)} u dy = 2^d u(y). \quad (2.42)$$

Aus der Stetigkeit von u folgt die gleiche Aussage für

$$u(z) \leq 2^d u(w) \quad \text{für } z, w \in \bar{B}_r(x_j) \cap V.$$

Seien $x, y \in V$. Dann existiert eine Folge $(j_m)_{0 \leq m \leq M}$ mit $M \leq N$ und

$$x \in B_r(x_{j_0}), y \in B_r(x_{j_m}), B_r(x_{j_{m+1}}) \cap B_r(x_{j_m}) \neq \{ \}.$$

Das sehen wir, indem wir $x \in \bar{V}$ wählen, und $W \subset \bar{V}$ als die Menge aller y wählen, für die eine derartige Kette existiert. Diese Menge ist offen in \bar{V} und offensichtlich auch abgeschlossen, und daher ganz \bar{V} .

Iterativ sehen wir

$$u(x) \leq 2^{Nd} u(y). \quad (2.43)$$

□

Satz 2.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : \mathbb{N} \rightarrow C^2(\Omega)$ eine Folge harmonischer Funktionen, die in $L^1(\Omega)$ eine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es $u_* \in L^1(\Omega)$, so dass:

- (i) $u_j \rightarrow u_*$ in $L^1(\Omega)$;
- (ii) $u_* \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u_* = 0$;
- (iii) $D^\alpha u_j$ konvergiert punktweise gegen $D^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$, insbesondere ist die Funktion u_* harmonisch.
- (iv) Falls $K \subset \Omega$ kompakt ist und $\alpha \in \mathbb{N}^d$, dann konvergiert $D^\alpha u_j \rightarrow D^\alpha u_*$ gleichmäßig in K .

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $B_r(x) \subset \Omega$. Aus

$$|u_j - u_m|(x) \leq \frac{1}{\omega_d r^d} \int_{B_r(x)} |u_j - u_m|(y) dy \leq \frac{1}{\omega_d r^d} \|u_j - u_m\|_{L^1(\Omega)} \quad (2.44)$$

folgt, dass $j \mapsto u_j(x)$ eine Cauchy-Folge ist (wir schreiben $\omega_d = m^n(B_1(0))$). Wir definieren $u_*(x) = \lim u_j(x)$. Da u_j eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$ ist, existiert eine integrierbare Funktion \tilde{u} , gegen die u_j in L^1 konvergiert. Eine Teilfolge konvergiert fast überall, also folgt $\tilde{u} = u_*$ fast überall, und damit auch $u_j \rightarrow u_*$ in $L^1(\Omega)$.

Aus

$$u_*(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_r(x)} u_j dy = \int_{B_r(x)} u_* dy \quad (2.45)$$

folgt, dass u_* die Mittelwertegenschaft erfüllt. Deshalb (Satz 2.6) ist u_* harmonisch.

Sei $K \subset \Omega$ kompakt, $r = \text{dist}(K, \partial\Omega)/r$. Für alle $x \in K$ gilt $B_r(x) \subset \Omega$ mit η_r wie oben

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(u_j(x) - u_*(x))| &= |(u_j - u_*) * \partial^\alpha \eta_r(x)| \\ &= \left| \int (u_j(y) - u_*(y)) \partial^\alpha \eta_r(x - y) dy \right| \\ &\leq \|u_j - u_*\|_{L^1} \|\partial^\alpha \eta_r\|_{sup} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Es folgt, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_K |\partial^\alpha(u_j - u_*)| = 0. \quad (2.47)$$

Das beendet den Beweis. □

Satz 2.14 (Weyl's Lemma). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, u integrierbar. Falls

$$\int u \Delta \varphi = 0 \quad (2.48)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, dann gibt es $\hat{u} \in C^\infty(\Omega)$ mit $\hat{u} = u$ fast überall und

$$\Delta \hat{u} = 0 \text{ in } \Omega. \quad (2.49)$$

Beweis. Sei η_r wie in Lemma 2.5, $B = B_R(x_*)$ eine Ball mit $\overline{B_{2R}(x_*)} \subset \Omega$.

Wir definieren, für $r \in (0, R)$, $u_r = u * \eta_r \in C^\infty(B)$. Dann

$$\Delta u_r(x) = \Delta(u * \eta_r) = u * (\Delta \eta_r) = \int u(y) \Delta \eta_r(x-y) dy = 0 \quad (2.50)$$

Deshalb $\Delta u_r = 0$. Da $u_r \rightarrow u$ in L^1 (η_r definiert eine Diracschar), folgt die Aussage aus Satz 2.13. \square

2.4 Explizite Lösung der Poissongleichung

Definition 2.15. Für $k \geq 1$ bezeichnet $C^k(\bar{\Omega})$ die Menge der Funktionen $u \in C^k(\Omega)$ so dass $\partial^\alpha u$ eine stetige Fortsetzung auf $\bar{\Omega}$ für alle α mit $|\alpha| \leq k$ besitzt. Analoges gilt für $C^k(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$. Wir bezeichnen den Raum aller Funktionen in $C^k(\Omega)$ mit $\partial^\alpha u$ beschränkt für $|\alpha| \leq k$ mit $C_b^k(\Omega)$.

Wir bezeichnen den Raum der $C^k(\Omega)$ Funktionen mit kompaktem Träger mit C_c^∞ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Die Fortsetzung von Du auf dem Abschluss $\bar{\Omega}$ ist eindeutig. $C_c^k(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$.

2.4.1 Fundamentallösung, Laplacegleichung im Ganzraum

Definition 2.16 (Fundamentallösung). Man definiert $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{falls } d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{falls } d \geq 3 \end{cases} \quad (2.51)$$

und $\Phi(0) = 0$.

Bemerkung. Im Beispiel in Abschnitt 2.3.1 haben wir gesehen, dass

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \quad (2.52)$$

Ist Ω eine Menge mit C^1 Rand und äußerer Einheitnormalen und $u \in C^1(\bar{\Omega})$ dann definieren wir $\partial_\nu u$ als die Richtungsableitung in Richtung ν .

Lemma 2.17. Für alle $r > 0$ gilt

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi d\mathcal{H}^{d-1} = -1. \quad (2.53)$$

Beweis. Man rechnet $\nabla|x| = x/|x|$,

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{|x|^d}, \quad (2.54)$$

und

$$\int_{\partial B_r(0)} \partial_\nu \Phi d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_{\partial B_r(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{|x|^d} = -1. \quad (2.55)$$

□

11.04.2019

Satz 2.18. Sei $d \geq 2$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, $u = f * \Phi$, d.h.,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y)f(y)dy. \quad (2.56)$$

Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$-\Delta u = f. \quad (2.57)$$

Definition 2.19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Man bezeichnet mit $L_{loc}^1(\Omega)$ die Menge der messbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ integrierbar sind.

Gegeben sei eine Funktionenfolge $f : \mathbb{N} \rightarrow L_{loc}^1(\Omega)$ und eine Funktion $f_* \in L_{loc}^1(\Omega)$; man sagt dass $f_j \rightarrow f_*$ in $L_{loc}^1(\Omega)$ wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_K |f_j - f_*| dy = 0. \quad (2.58)$$

Bemerkung. $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $f\chi_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $R > 0$; $f_j \rightarrow f_*$ in $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $f_j\chi_{B_R(0)} \rightarrow f_*\chi_{B_R(0)}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $R > 0$.

Beispiele. $L^1(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$ und $C(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$. Insbesondere ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f_j(x) = |x|^2/j$, in $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$; diese Folge konvergiert gegen 0 in $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ (aber nicht in L^1 !).

Bemerkung. Die Fundamentallösung Φ , in Def. 2.16 eingeführt, erfüllt $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 2.20. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

(i) $C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$;

(ii) Für $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy, \quad (2.59)$$

und $f * g \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Falls zusätzlich $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, dann $f * g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und $D(f * g) = (Df) * g$.

Beweis. (i): Jede stetige Funktion ist auf einer beliebigen kompakten Menge integrierbar.

(ii): Sei $R > 0$, so dass $\text{supp } f \subset B_R(0)$. Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $f(x - y)g(y) = 0$ für alle $y \notin B_R(x)$, deshalb existiert das Integral.

Sei $x_j \rightarrow x$. Dann ist $B_R(x_j) \subset B_{R+1}(x)$ für alle j groß genug. Mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{R+1}(x)} f(x_j - y)g(y)dy = \int_{B_{R+1}(x)} \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j - y)g(y)dy \quad (2.60)$$

$$= \int_{B_{R+1}(x)} f(x - y)g(y)dy, \quad (2.61)$$

deshalb ist $f * g$ stetig.

(iii): Man rechnet, für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $h \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,

$$\frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h} = \int_{B_{R+1}(x)} g(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} dy. \quad (2.62)$$

Da $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} = D_i f(x - y) \quad (2.63)$$

gleichmäßig in y . Mit $g \in L^1_{loc}$, und der Stetigkeit von Df folgt, dass $f * g \in C^1$ mit

$$D(f * g) = (Df) * g. \quad (2.64)$$

□

Beweis von Satz 2.18. Aus Lemma 2.20 folgt, dass das Integral existiert, $u \in C^1$ und

$$\partial_{x_j} u = \Phi * \partial_{x_j} f. \quad (2.65)$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 2.20 zeigt dass $Du \in C^1$ und

$$\partial_{x_j x_k}^2 u = \Phi * \partial_{x_j x_k}^2 f. \quad (2.66)$$

Deshalb gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, mit $\Delta u = \Phi * \Delta f$.

Sei $R > |x|$, so dass $\text{supp } f \in B_R(0)$. Wir rechnen

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy \quad (2.67)$$

$$= \int_{B_R(x)} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy \quad (2.68)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x - y) dy. \quad (2.69)$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $y \mapsto \Phi(y) \Delta f(x - y)$ in $L^1(B_R(x))$ liegt, und $\chi_{B_\varepsilon(0)} \rightarrow 0$ punktweise fast überall. Wir wenden jetzt den Satz von Gauß zweimal an; dabei nehmen wir an, dass $B_\varepsilon(0) \subset B_R(x)$ (wenn nicht, können wir R durch $R + |x| + 1$ ersetzen).

$$\int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y f(x - y) dy \quad (2.70)$$

$$= \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} (\Phi(y) \partial_{y_j} f(x - y)) dy \quad (2.71)$$

$$= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_{\nu_y} f(x - y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad (2.72)$$

$$- \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} \Phi(y) \cdot \partial_{y_j} f(x - y) dy. \quad (2.73)$$

Die Integrale auf $\partial B_R(x)$ können weggelassen werden, weil $f(x - y) = 0$ und $Df(x - y) = 0$ für alle $y \in \partial B_R(x)$. Hier und im Folgendem ist schreiben wir $\partial_\nu f(x - y)$ für $(D_y f(x - y)) \nu(y)$ – d.h., das Differential der Funktion f wird im Punkt $x - y$ entlang der Normale $\nu(y)$ im Punkt y ausgewertet. Dabei ist $\nu(y) = y/|y|$ die äußere Normale auf dem Rand von $B_\varepsilon(0)$ (diese ist zeitgleich die *innere* Normale auf dem Rand von $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$, daher das Minuszeichen).

Die zweite Anwendung von Gauß liefert

$$\int_{B-R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \quad (2.74)$$

$$= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_{\nu_y} f(x-y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad (2.75)$$

$$+ \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_{\nu_y} \Phi(y) f(x-y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \Phi(y) f(x-y) dy \quad (2.76)$$

Da $\Delta \Phi = 0$ auf $B_R(x) \setminus B_\varepsilon(0)$, folgt:

$$\int_{B_R(x)\setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy \quad (2.77)$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(0)} [\Phi(y) \partial_\nu f(x-y) - \partial_\nu \Phi(y) f(x-y)] d\mathcal{H}^{d-1}(y). \quad (2.78)$$

Man überprüft, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_\nu f(x-y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| = 0 \quad (2.79)$$

(die Funktion $\partial_\nu f(x-y)$ ist beschränkt, der Rest wird explizit integriert).
Deshalb gilt:

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) d\mathcal{H}^{d-1}(y). \quad (2.80)$$

Mit dem Variabelwechsel $y = \varepsilon z$ folgt

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu \Phi(z) f(x - \varepsilon z) d\mathcal{H}^{d-1}(z). \quad (2.81)$$

Da $f(x - \varepsilon z)$ beschränkt ist und punktweise gegen $f(x)$ konvergiert, folgt mit dominierter Konvergenz und Lemma 2.17 dass

$$\Delta u(x) = f(x) \int_{\partial B_1(0)} \partial_\nu \Phi(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -f(x). \quad (2.82)$$

Damit ist der Beweis beendet. \square

2.4.2 Greensche Funktion

Der Satz von Gauß gilt für C^1 -Polyeder, d.h. für beschränkte offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, deren Rand $\partial\Omega$ von endlichem \mathcal{H}^{n-1} Maß ist, und für die eine C^1 Mannigfaltigkeit M in $\partial\Omega$, so dass Ω immer auf einer Seite von M liegt, und $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus M) = 0$.

Definition 2.21. Eine beschränkte offene Menge, die den Bedingungen des Satzes von Gauß genügt, nennen wir C^1 Polyeder.

Definition 2.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Eine Funktion $G : \Omega \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Gebiet Ω falls für jedes $x \in \Omega$ eine Funktion $\varphi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ existiert, so dass

$$\Delta \varphi_x = 0 \text{ in } \Omega \quad (2.83)$$

$$\varphi_x(y) = \Phi(y - x) \text{ für alle } y \in \partial\Omega, \quad (2.84)$$

und $G(x, y) = \Phi(y - x) - \varphi_x(y)$.

Bemerkung. Das bedeutet, dass $G(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega \times \partial\Omega$ und dass $\Delta(G(x, \cdot) - \Phi(\cdot - x)) = 0$.

Sei $f \in \mathcal{D} := C_0^\infty$, mit $\text{supp } f \in \Omega$ und $g \in L_{loc}^1(\Omega)$. Wir schreiben

$$\Lambda_g = \int_{\Omega} g(y)f(y)dy.$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$-\Delta \Lambda_{G(x, \cdot)}(f) = -\Delta \Lambda_{\Phi(\cdot - x)}(f) - \Delta \Lambda_{\varphi_x}(f) = f(x). \quad (2.85)$$

Man schreibt auch suggestiv, für uns aber im Moment nicht rigoros definiert

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x \text{ in } \mathcal{D}', \text{ für alle } x \in \Omega \text{ fest} \quad (2.86)$$

$$G(x, \cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (2.87)$$

Bemerkung. Für beschränkte Mengen Ω ist die Funktion φ_x , falls existent, eindeutig. Deshalb ist auch G in diesem Fall eindeutig.

Bemerkung. $G : \Omega \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, für alle $x \in \Omega$ ist $G(x, \cdot) \in C^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$.

Satz 2.23. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^1 -Polyeder mit $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$, G eine Green'sche Funktion für Ω , $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.88)$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \partial_\nu G(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (2.89)$$

Beweisidee: Mit dem Integralsatz von Gauß folgt

$$\int_{\Omega} (u\Delta G - G\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u\partial_{\nu}G - G\partial_{\nu}u) d\mathcal{H}^{d-1}, \quad (2.90)$$

wobei ΔG distributionell (d.h. wie in (2.85)) interpretiert werden sollte. Mit $\Delta G(x - \cdot) = \delta_x$ und $G = 0$ auf dem Rand folgt die Aussage.

Beweis. Sei $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B_{\varepsilon}(x)} \subset \Omega$, $V_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}(x)}$. Dann gilt $G(x, \cdot) \in C^2(V_{\varepsilon}) \cap C^1(\overline{V_{\varepsilon}})$, deshalb

$$\int_{V_{\varepsilon}} [u(y)\Delta G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y)] dy = \quad (2.91)$$

$$\int_{\partial V_{\varepsilon}} [u(y)\partial_{\nu}G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu}u(y)] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (2.92)$$

Mit $\Delta G = 0$ in V_{ε} und $G(x, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ reduziert sich diese Gleichung auf

$$- \int_{V_{\varepsilon}} G(x, y)\Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_{\nu}G(x, y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \quad (2.93)$$

$$- \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} [u(y)\partial_{\nu}G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu}u(y)] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (2.94)$$

Da Ω beschränkt ist, $\Phi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi_x \in C(\overline{\Omega})$ gilt $G(x, \cdot) \in L_1(\overline{\Omega})$ und deshalb

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{V_{\varepsilon}} G(x, y)\Delta u(y) dy = - \int_{\Omega} G(x, y)\Delta u(y) dy = \int_{\Omega} G(x, y)f(y) dy. \quad (2.95)$$

Wir werden unten zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} [u(y)\partial_{\nu}G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu}u(y)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = u(x). \quad (2.96)$$

Mit (2.93), (2.95) und (2.96) ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (2.96) zu beweisen. Sei $G(x, y) = \Phi(y - x) - \varphi_x(y)$. Aus dem Beweis von Satz 2.18 folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} [u(y)\partial_{\nu}\Phi(y - x) - \Phi(y - x)\partial_{\nu}u(y)] d\mathcal{H}^{n-1}(y) = -u(x). \quad (2.97)$$

Der Term mit φ_x wird partiell integriert (d.h. mit dem Satz von Gauß):

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} [u(y)\partial_{\nu}\varphi_x(y) - \varphi_x(y)\partial_{\nu}u(y)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) \quad (2.98)$$

$$= \int_{B_{\varepsilon}(x)} (u\Delta\varphi_x - \varphi_x\Delta u)(y) dy. \quad (2.99)$$

Mit $\Delta\varphi_x = 0$ und

$$\left| \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_x \Delta u(y) dy \right| \leq \max\{|\varphi_x(y)| : y \in \overline{B_{r/2}(x)}\} \max\{|\Delta u(y)| : y \in \overline{B_{r/2}(x)}\} \omega_d \varepsilon^d \quad (2.100)$$

folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} [u(y) \partial_\nu \varphi_x(y) - \varphi_x(y) \partial_\nu u(y)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0. \quad (2.101)$$

Mit (2.97) ist der Beweis beendet. \square

Satz 2.24. Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $G(x, y) = G(y, x)$.

Beweis. Seien $x, y \in \Omega$ fest. Wir brauchen nur den Fall $x \neq y$ zu betrachten. Wir definieren zwei Funktionen $v, w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$v(z) = G(x, z) \quad (2.102)$$

$$w(z) = G(y, z). \quad (2.103)$$

Dann ist $v(z) = w(z) = 0$ für $z \in \partial\Omega$ und $\Delta v = 0$ in $\Omega \setminus \{x\}$, und $\Delta w = 0$ in $\Omega \setminus \{y\}$.

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)} \subset \Omega$ und $\overline{B_\varepsilon(x)} \cap \overline{B_\varepsilon(y)} = \emptyset$. Sei $V_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)}$. Dann gilt

$$\int_{V_\varepsilon} (w \Delta v - v \Delta w) dz = \int_{V_\varepsilon} \sum_{j=1}^d \partial_{z_j} (w \partial_{z_j} v - v \partial_{z_j} w) dz \quad (2.104)$$

$$= \int_{\partial V_\varepsilon} (w \partial_\nu v - v \partial_\nu w) d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.105)$$

und deshalb

$$0 = \int_{\partial B_\varepsilon(x) \cup \partial B_\varepsilon(y)} (w \partial_\nu v - v \partial_\nu w) d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.106)$$

Wir betrachten die Ränder der zwei Bälle getrennt. Der erste ist

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w \partial_\nu v - v \partial_\nu w) d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.107)$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z) \partial_\nu G(x, z) - G(x, z) \partial_\nu w(z)) d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.108)$$

Da $w \in C^2(B_\varepsilon(x))$, folgt aus (2.96)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w(z) \partial_\nu G(x, z) - G(x, z) \partial_\nu w(z)) d\mathcal{H}^{d-1} = -w(x). \quad (2.109)$$

Analog,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} (w \partial_\nu v - v \partial_\nu w) d\mathcal{H}^{d-1} \quad (2.110)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} (G(y, z) \partial_\nu v(z) - v(z) \partial_\nu G(y, z)) d\mathcal{H}^{d-1} = v(y). \quad (2.111)$$

Deshalb gilt

$$G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y),$$

und der Beweis ist beendet. \square

2.4.3 Spezialgebiete

Erinnerung: Aus Def. 2.16,

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{falls } d = 2 \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{falls } d \geq 3, \end{cases} \quad (2.112)$$

folgt

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{x}{|x|^d}. \quad (2.113)$$

Halbraum

Definition 2.25. Die Greensche Funktion für das Gebiet

$$\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} \quad (2.114)$$

ist

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - Px), \quad (2.115)$$

wobei $Px = (x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d)$, d.h., $P = \text{Id} - 2e_d \otimes e_d$. Man nennt $K : \mathbb{R}_+^d \times \partial\mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}$, $K = -\partial_\nu G$,

$$K(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_d} = \frac{2x_d}{d\omega_d} \frac{1}{|x - y|^d} \quad (2.116)$$

der Poissonkern des Halbraumes.

Lemma 2.26. (i) Für alle $x \in \mathbb{R}_+^d$ ist $K(x, \cdot) \in C(\partial\mathbb{R}_+^d) \cap L^1(\partial\mathbb{R}_+^d)$.

(ii) Für alle $y \in \partial\mathbb{R}_+^d$ gilt $K(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ und

$$\Delta K(\cdot, y) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 K(x, y) = 0.$$

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}_+^d$ gilt

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(x, y) dy = 1. \quad (2.117)$$

Beweis. (i): Stetigkeit folgt aus $|x - y| \geq |x_d - y_d| = x_d > 0$. Integrierbarkeit folgt aus der Tatsache dass $|K(x, \cdot)| \leq C/|y|^d$ für alle y groß genug.

(ii): Folgt aus der Definition und $\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

(iii): Sei $x \in \mathbb{R}_+^d$, $\varepsilon \in (0, x_d)$, $R > 2|x|$. Dann ist $y \mapsto \Phi(y - x) - \Phi(y - Px)$ harmonisch in $\Omega_\varepsilon = B_R(0) \cap \mathbb{R}_+^d \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, und mit dem Satz von Gauß folgt

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_\nu [\Phi(y - x) - \Phi(y - Px)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0. \quad (2.118)$$

Aus Lemma 2.17 folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y - x) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1, \quad (2.119)$$

und mit $\Delta\Phi(y - Px) = 0$ auf $B_\varepsilon(x)$ folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_\nu \Phi(y - Px) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0. \quad (2.120)$$

Deshalb gilt

$$\int_{\partial(\mathbb{R}_+^d \cap B_R(0))} \partial_\nu [\Phi(y - x) - \Phi(y - Px)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1. \quad (2.121)$$

Aus

$$D\Phi(y - x) = D\Phi\left(\frac{y - x}{R}\right) \frac{1}{R^{d-1}} \quad (2.122)$$

und dem Variablenwechsel $y = Rz$ folgt

$$\int_{\partial B_R(0) \cap \mathbb{R}_+^d} \partial_\nu \Phi(y - x) d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \int_{\partial B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^d} \partial_\nu \Phi\left(z - \frac{x}{R}\right) d\mathcal{H}^{d-1}(z). \quad (2.123)$$

Da $|x|/R < 1/2$ gilt $|D\Phi(z - x/R)| \leq \max |D\Phi|(\overline{B_{3/2}(0)} \setminus B_{1/2}(0))$ für alle z und R , und mit dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R(0) \cap \mathbb{R}_+^d} [\partial_\nu \Phi(y - x) - \partial_\nu \Phi(y - Px)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) \quad (2.124)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^d} \left[\partial_\nu \Phi\left(z - \frac{x}{R}\right) - \partial_\nu \Phi\left(z - \frac{Px}{R}\right) \right] d\mathcal{H}^{d-1}(z) \quad (2.125)$$

$$= \int_{\partial B_1(0) \cap \mathbb{R}_+^d} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\partial_\nu \Phi\left(z - \frac{x}{R}\right) - \partial_\nu \Phi\left(z - \frac{Px}{R}\right) \right] d\mathcal{H}^{d-1}(z) = 0. \quad (2.126)$$

Es folgt, dass

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^d} \partial_\nu [\Phi(y-x) - \Phi(y-Px)] d\mathcal{H}^{d-1}(y) = -1. \quad (2.127)$$

Hier ν ist die äußere Normale, $\nu = -e_d$, deshalb $-\partial_\nu = \partial/\partial y_d$. \square

Satz 2.27. Sei $g \in C_b^0(\partial\mathbb{R}_+^d)$ (d.h., beschränkt und stetig) und sei

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(x,y)g(y) & \text{falls } x \in \mathbb{R}_+^d \\ g(x) & \text{falls } x \in \partial\mathbb{R}_+^d. \end{cases} \quad (2.128)$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d) \cap C_b^0(\overline{\mathbb{R}_+^d})$, $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}_+^d und $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}_+^d$.

Beweis. Teil 1: wir zeigen $u \in C^2(\mathbb{R}_+^d)$ und $\Delta u = 0$. Sei $x^* \in \mathbb{R}_+^d$ fest, $\varepsilon = x_d^*/2 > 0$. Die Ableitungen DK , D^2K sind auf $(x,y) \in B_\varepsilon(x^*) \times \partial\mathbb{R}_+^d$ beschränkt und gleichmäßig in y integrierbar. Deshalb gilt $u \in C^2(B_\varepsilon(x^*))$ und

$$\Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} \Delta K(x,y)g(y) = 0. \quad (2.129)$$

Teil 2: wir zeigen $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^d})$. Für $x_* \in \partial\mathbb{R}_+^d$ und $x \in \mathbb{R}_+^d$ gilt

$$u(x) - u(x_*) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(x,y)g(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y) - g(x_*) \quad (2.130)$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} K(x,y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{d-1}(y). \quad (2.131)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(y) - g(x_*)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_{2\delta}(x_*) \cap \partial\mathbb{R}_+^d$.

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \cap B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \quad (2.132)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^d} |K(x,y)| d\mathcal{H}^{d-1}(y) = \varepsilon \quad (2.133)$$

und

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B_{2\delta}(x_*)} K(x,y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \right| \quad (2.134)$$

$$\leq 2 \max |g| \int_{\partial\mathbb{R}_+^d \setminus B_{2\delta}(x_*)} |K(x,y)| d\mathcal{H}^{d-1}(y). \quad (2.135)$$

Für $x \in B_\delta(x_*)$ und $y \in \partial\mathbb{R}_+^d \setminus B_{2\delta}(x_*)$ gilt $|x-y| \geq |y-x_*| - |x-x_*| \geq |y-x_*| - \delta$, und deshalb

$$\frac{1}{|y-x|^d} \geq \frac{1}{(|y-x_*| - \delta)^d}, \quad (2.136)$$

wobei die letzte Funktion auf $\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_{2\delta}(x_*)$ integrierbar ist. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \int_{\partial \mathbb{R}_+^d \setminus B_\delta(x_*)} \frac{2x_d}{d\omega_d} \frac{1}{|x-y|^d} d\mathcal{H}^{d-1}(y) \quad (2.137)$$

$$= \int_{\partial \mathbb{R}_+^d \setminus B_\delta(x_*)} \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{2x_d}{d\omega_d} \frac{1}{|x-y|^d} d\mathcal{H}^{d-1}(y) = 0. \quad (2.138)$$

Deshalb gibt es ein $\delta' < \delta$, so dass

$$|u(x) - u(x^*)| \leq 2\varepsilon \quad (2.139)$$

für alle $x \in B_{\delta'}(x_*) \cap \mathbb{R}_+^d$. Da g in x_* stetig ist, gibt es ein $\delta'' < \delta'$ so dass (2.139) für alle $x \in B_{\delta'}(x_*) \cap \partial \mathbb{R}_+^d$ gilt. Das beendet den Beweis. \square

23.04.2019

Satz 2.28. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}_+^d) \cap C_b(\overline{\mathbb{R}_+^d})$. Dann gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^d} u(x) = \sup_{y \in \partial \mathbb{R}_+^d} u(y)$$

Beweis. Sei u wie im Satz, $M = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^d} u(x)$, $m = \sup_{y \in \partial \mathbb{R}_+^d} u(y)$. Offensichtlich gilt $0 \leq m \leq M < \infty$ und wir wollen $M = m$ zeigen. Für $t > 1$ ist die Funktion

$$w(x) = (M - m + \varepsilon) \frac{\Phi((0, -t)^T) - \Phi(x - (0, -t)^T)}{|\Phi((0, -t)^T)|}$$

harmonisch, nichtnegativ in \mathbb{R}_+^d mit

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) \geq M - m + \varepsilon.$$

Sei $R > 0$ so dass

$$w(x) \geq M - m \quad (2.140)$$

für $|x| = R$. Sei $v = w + m - u$ und $U_R = \mathbb{R}_+^d \cap B_R(0)$. Dann ist v harmonisch in U_R , stetig auf $\overline{U_R}$ und ≥ 0 auf ∂U_R . Mit dem Maximumprinzip folgt

$$v \geq 0 \quad \text{in } \overline{U_R}$$

und damit (ausserhalb folgt das aus (2.140) und der Konstruktion)

$$u(x) \leq m + w(x).$$

Wir betrachten nun die Abhängigkeit von t und schreiben $w_t(x)$. Da

$$|\nabla w_t(x)| \leq \frac{M - m + \varepsilon}{d\omega} \frac{1}{\Phi(-te_d)|x - (0, -t)^T|^{d-1}} \leq (M - m + \varepsilon)t^{-1} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

und

$$w(0) = 0$$

folgt

$$w_t(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{mit } t \rightarrow \infty$$

in \mathbb{R}_+^d . Damit folgt $u(x) \leq m$ für alle x . \square

Bemerkung. Wie früher folgt, dass u in Satz 2.26 die einzige harmonische und beschränkte Funktion ist, die mit g auf dem Rand übereinstimmt.

Der Ball

Lemma 2.29. *Die Greensche Funktion für $B_r(0)$ ist*

$$G(x, y) = \begin{cases} \Phi(y - x) - \Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(re_1) & \text{falls } x = 0. \end{cases} \quad (2.141)$$

Beweis. Für $y \in \partial B_r(0)$, $x \neq 0$,

$$\left| \frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x \right|^2 = \frac{|x|^2}{r^2}|y|^2 - 2x \cdot y + \frac{r^2}{|x|^2}|x|^2 = |x|^2 - 2x \cdot y + r^2 = |x - y|^2, \quad (2.142)$$

deshalb gilt $G(x, y) = 0$ falls $|y| = r$. Man rechnet $\Delta_y G(x, y) = \Delta_y \Phi(y - x) - \frac{|x|^2}{r^2} \Delta_y \Phi\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = 0$. \square

Für $|y| = r$ gilt

$$\partial_\nu G(x, y) = \frac{y}{r} \cdot \nabla \Phi(y - x) - \frac{y|x|}{r} \cdot \frac{1}{r} (D\Phi)\left(\frac{|x|}{r}y - \frac{r}{|x|}x\right) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{r^2 - x^2}{r|x - y|^d}. \quad (2.143)$$

Definition 2.30. *Der Poissonkern für den Ball $B_r(0)$ ist*

$$K_{B_r(0)}(x, y) = \frac{1}{d\omega_d} \frac{r^2 - |x|^2}{r|x - y|^d}. \quad (2.144)$$

Für den Ball $B_r(x_*)$ ist er gegeben durch

$$K_{B_r(x_*)}(x, y) = \frac{1}{d\omega_d} \frac{r^2 - (x - x_*)^2}{r|x - y|^d}. \quad (2.145)$$

Satz 2.31. *Sei $g \in C(\partial B_r(x_0))$, $u : \overline{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \begin{cases} \int_{\partial B_r(x_0)} K(x, y)g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } x \in B_r(x_0) \\ g(x) & \text{falls } x \in \partial B_r(x_0) \end{cases} \quad (2.146)$$

definiert. Dann gilt $u \in C^2(B_r(x_0)) \cap C(\overline{B}_r(x_0))$ und $\Delta u = 0$ in $B_r(x_0)$.

Beweis. Wie in Lemma 2.26 zeigt man, dass $\Delta_x K = \sum_i \partial_{x_i}^2 K = 0$. Wie in Satz 2.27 folgt, dass u in $B_r(x_0)$ harmonisch ist.

Es bleibt zu zeigen, dass u auf dem Rand stetig ist. Da $u = 1$ harmonisch ist, folgt aus Satz 2.23, dass $\int_{\partial B_r(x_0)} K(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 1$ für alle $x \in B_r(x_0)$.

Sei $x_* \in \partial B_r(x_0)$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(y) - g(x_*)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für alle } y \in \partial B_r(x_0) \cap B_{2\delta}(x_*). \quad (2.147)$$

Sei $x \in B_r(x_0) \cap B_\delta(x_*)$. Dann gilt:

$$|u(x) - u(x_*)| = \left| \int_{\partial B_r(x_0)} K(x, y)(g(y) - g(x_*)) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| \quad (2.148)$$

$$\leq \int_{\partial B_r(x_0)} K(x, y) |g(y) - g(x_*)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad (2.149)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \max |g| \int_{\partial B_r(x_0) \setminus B_{2\delta}(x_*)} K(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (2.150)$$

Aus $|y - x_*| \geq 2\delta$ und $|x - x_*| < \delta$ folgt $|x - y| \geq \delta$, $K(x, y) \leq (r^2 - |x - x_0|^2)/(d\omega_d \delta^d)$ und

$$|u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{d\omega_d} \max |g| \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{\delta^d}. \quad (2.151)$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x \rightarrow x_*} |u(x) - u(x_*)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.152)$$

für alle $\varepsilon > 0$, da ε beliebig war, ist die Aussage bewiesen. \square

Wir haben insbesondere folgendes bewiesen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $u \in C(\Omega)$. Dann gibt es genau eine Funktion $v \in C(\Omega)$, so dass gilt:

$$v = u \text{ in } \Omega \setminus B_r(x) \quad (2.153)$$

$$\Delta v = 0 \text{ in } B_r(x). \quad (2.154)$$

Die Funktion v wird harmonische Fortsetzung von u genannt und ist explizit durch

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus B_r(x_0) \\ \int_{\partial B_r(x_0)} K_{B_r(x_0)}(x, y) u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{falls } x \in B_r(x_0) \end{cases} \quad (2.155)$$

gegeben.

Definition 2.32. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir nennen $u \in C^\infty(\Omega)$ analytisch, falls für alle $x_0 \in \Omega$ ein $R > 0$ existiert, so dass

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

für $x \in B_R(x_0)$.

Beispiele: Polynome sind analytisch. Wir betrachten allgemeine Potenzreihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha}$$

und definieren

$$R^{-1} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{|\alpha|=m} |a_{\alpha}|^{1/m} \in [0, \infty].$$

Sei jetzt $r < R$, $|(x - x_0)_j| \leq r$ für jede Komponente, $r < R - \varepsilon$ und

$$|a_{\alpha}| \leq C(R - \varepsilon)^{-|\alpha|}.$$

Dann ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} |a_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} C m^d \left(\frac{r}{R - \varepsilon} \right)^m < \infty$$

und die Potenzreihe konvergiert in $x_0 + [-r, r]^d$. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz in $x_0 + [-r, r]^d$ dass $R > r$, wie in einer Dimension.

Satz 2.33. *Harmonische Funktionen sind analytisch.*

26.04.2019

Beweis. Es genügt, die Situation $u \in C^2(B_r(x_*)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ zu betrachten. Ohne Einschränkung sei $x_* = 0$ und $r = 1$. Dann gilt mit dem Poissonkern für $|x| < 1$

$$u(x) = \int_{\partial B_1(0)} K(x, y) u(y) d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{d\omega_d} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^d} u(y) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Mit der geometrischen Reihe gilt (da $|y| = 1$) mit $q = (2\langle x, y \rangle - |x|^2)$

$$\frac{1}{|x - y|^2} = \frac{1}{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1} = \sum_{m=0}^{\infty} (2\langle x, y \rangle - |x|^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} q^m$$

falls $|x| < \frac{1}{3}$ und damit $|q| < 1$. Das Produkt von Potenzreihen mit Konvergenzradius 1 hat wieder Konvergenzradius ≤ 1 (mit Cauchysummation). Also ist

$$\frac{1}{|x - y|^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2\langle x, y \rangle - |x|^2)^m$$

mit

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{\frac{1}{m}} \leq 1.$$

Also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ so dass

$$|a_m| \leq C_\varepsilon (1 + \varepsilon)^m$$

Damit ist

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{\partial B_1(0)} (2\langle x, y \rangle - |x|^2)^m u(y) d\mathcal{H}^{d-1}(y)$$

wobei die Summanden Polynome vom Grad $2m$ sind, die gleichmässig konvergieren, falls $|x| \leq \frac{1}{3}$. Wir betrachten nun die Taylorpolynome $T_N(x)$. Der Glied der Reihe mit Potenz m hat Terme vom Grad zwischen m und $2m$. Das Taylorpolynom vom Grad N ist die Summe aller Terme mit $2m \leq N$, und einem Teil der Summanden nach Ausmultiplizieren für $m \leq N$. Da

$$(2\langle x, y \rangle - |x|^2)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (2\langle x, y \rangle)^j |x|^{2(m-j)}$$

und daher

$$|(2\langle x, y \rangle - |x|^2)^m| \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |2\langle x, y \rangle|^j |x|^{2(m-j)} = |2|x| + |x|^2|^m \leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)^m = \left(\frac{7}{9}\right)^m.$$

Damit folgt

$$\left| \frac{1}{|x - y|^{2n}} - T_{y,N}(x) \right| \leq C_\varepsilon \sum_{m=M+1}^{\infty} \left((1+\varepsilon) \frac{7}{9} \right)^m = C_\varepsilon \frac{1}{1 - \frac{7}{9}\varepsilon} \left((1+\varepsilon) \frac{7}{9} \right)^{N+1} \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$. Damit ist

$$T_N u(x) = \int_{\partial B_1(0)} T_{N,y} u(y) d\mathcal{H}^{d-1}$$

und

$$|u(x) - T_N u(x)| \leq \frac{9}{2} \left(\frac{7}{9}\right)^{N+1} \int_{\partial B_1(0)} |u(y)| d\mathcal{H}^{d-1}$$

Damit ist u analytisch. Ist d ungerade, dann nehmen wir eine Dummyvariable dazu.

□

2.5 Existenz von Lösungen

Definition 2.34. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C(\Omega)$. Die Funktion u heißt *subharmonisch*, falls

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \text{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \quad (2.156)$$

und *superharmonisch*, falls

$$u(x) \geq \int_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \text{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega. \quad (2.157)$$

Lemma 2.35. (i) Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist genau dann *subharmonisch*, wenn

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.158)$$

(ii) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ ist genau dann *subharmonisch*, wenn $-u$ *superharmonisch* ist.

(iii) Eine Funktion $u \in C(\Omega)$ ist genau dann *harmonisch*, wenn u sowohl *subharmonisch* als auch *superharmonisch* ist.

Beweis. (i): in Satz 2.3(ii) (Mittelwertsatz) wurde gezeigt, dass $-\Delta u \leq 0$ (2.156) impliziert. Die Gegenrichtung wird wie in Satz 2.4 bewiesen: Falls ein $x \in \Omega$ mit $-\Delta u(x) > 0$ existieren würde, dann gäbe es ein $r > 0$, so dass $-\Delta u > 0$ auf $B_r(x)$ und $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Dann würde aus 2.3(iii) folgen

$$u(x) > \int_{B_r(x)} u \, dy, \quad (2.159)$$

gegen die Annahme.

(ii): es reicht, $-u$ in der Definition einzusetzen.

(iii): eine harmonische Funktion erfüllt

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad \text{für alle Bälle mit } \overline{B}_r(x) \subset \Omega \quad (2.160)$$

und ist damit sowohl *subharmonisch* als auch *superharmonisch*. Die Gegenrichtung wurde in Satz 2.6 bewiesen (für alle $x_* \in \Omega$ gibt es ein $r_* > 0$, so dass $\overline{B}(x_*, r_*) \subset \Omega$, dann $u \in L_1(\overline{B}(x_*, r_*))$, und daraus folgt $\Delta u = 0$ in x_* \square)

Lemma 2.36. (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $u, v \in C(\overline{\Omega})$, u *subharmonisch*, v *superharmonisch*. Falls $u \leq v$ auf $\partial\Omega$, dann gilt entweder $u < v$ auf Ω oder $u = v$ auf Ω .

(ii) Sei $u \in C(\Omega)$ subharmonisch, $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, und sei $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die harmonische Fortsetzung von u auf $B_r(x)$, nämlich,

$$v(y) = \begin{cases} u(y) & \text{falls } y \in \Omega \setminus B_r(x) \\ \int_{\partial B_r(x)} K_{B_r(x)}(y, z) u(z) d\mathcal{H}^{d-1}(z) & \text{falls } y \in B_r(x). \end{cases} \quad (2.161)$$

Dann gilt $v \in C(\Omega)$, v ist subharmonisch und $u \leq v$.

(iii) Seien $u_1, \dots, u_K \in C(\Omega)$ subharmonisch. Dann ist $u = \max\{u_1, \dots, u_K\}$ ebenfalls subharmonisch.

Beweis. (i): Die Funktion $u - v$ ist subharmonisch, und $u - v \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Die Aussage folgt aus dem starken Maximumprinzip, Satz 2.11.

(ii): Aus $v \in C(\overline{B_r(x)})$ und $u \in C(\Omega \setminus B_r(x))$ mit $u = v$ auf $\partial B_r(x)$ folgt $v \in C(\Omega)$.

Die Funktion v ist in $B_r(x)$ harmonisch und auf $\partial B_r(x)$ gilt $u = v$. Aus (i) folgt, dass $u \leq v$ in $B_r(x)$. Deshalb gilt $u \leq v$ auf Ω .

Sei $\overline{B_R(y)} \subset \Omega$. Falls $y \notin B_r(x)$ dann gilt

$$v(y) = u(y) \leq \int_{\partial B_R(y)} u(z) d\mathcal{H}^{d-1}(z) \leq \int_{\partial B_R(y)} v(z) d\mathcal{H}^{d-1}(z). \quad (2.162)$$

Falls $y \in B_r(x)$, betrachten wir die Funktion $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w(z) = \begin{cases} v(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_R(y) \\ \int_{\partial B(y, R)} K_{B_R(y)}(z, t) v(t) d\mathcal{H}^{d-1}(t) & \text{falls } z \in B_R(y). \end{cases} \quad (2.163)$$

Aus der Definition folgt

$$w(y) = \int_{\partial B_R(y)} w(t) d\mathcal{H}^{d-1}(t) = \int_{\partial B_R(y)} v(t) d\mathcal{H}^{d-1}(t). \quad (2.164)$$

Falls

$$v(y) \leq w(y) \quad (2.165)$$

folgt

$$v(x) \leq \int_{\partial B_R(y)} v(y) d\mathcal{H}^{d-1}$$

und für alle R mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ damit auch

$$v(x) \leq \int_{B_R(x)} v(y) dy$$

für alle derartigen Bälle. Damit ist der Beweis beendet.

Es bleibt, (2.165) zu beweisen. Die Funktion u ist subharmonisch und w ist harmonisch in $B_R(y)$, aus $u \leq v = w$ auf $\partial B_R(y)$ und dem Maximumprinzip folgt $u \leq w$ auf $B_R(y)$.

Die Funktion $v-w$ ist harmonisch in $B_r(x) \cap B_R(y)$, und $v-w = u-w \leq 0$ auf $(\partial B_r(x)) \cap B_R(y) \subset B(y, R)$ und $v-w = 0$ auf $\partial B_R(y)$. Deshalb gilt $v-w \leq 0$ auf $\partial(B_r(x) \cap B_R(y))$ und damit auch in $y \in B_r(x) \cap B_R(y)$.

(iii): Sei $u = \max_j u_j$, $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $p \in \{1, \dots, K\}$, so dass $u(x) = u_p(x)$. Aus $u_p \leq u$ folgt

$$u(x) = u_p(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u_p d\mathcal{H}^{d-1} \leq \int_{\partial B_r(x)} u d\mathcal{H}^{d-1}. \quad (2.166)$$

□

Definition 2.37. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$. Dann definieren wir:

$$S_g = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ subharmonisch und } v \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (2.167)$$

Satz 2.38. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$, $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \quad (2.168)$$

definiert. Die Funktion u ist wohldefiniert und harmonisch.

Beweis. Die Menge S_g ist nicht leer, weil die konstante Funktion $x \mapsto \min g(\partial\Omega)$ in S_g liegt.

Für alle $x \in \overline{\Omega}$ ist die Menge $\sup\{v(x) : v \in S_g\}$ beschränkt, weil $v(x) \leq \max g(\partial\Omega)$ für alle $v \in S_g$. Deshalb ist u wohldefiniert.

Sei $y \in \Omega$, $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S_f$ eine Folge, so dass $v_k(y) \rightarrow u(y)$. Wir können oBdA annehmen, dass $v_k \leq v_{k+1}$ (sonst betrachten wir die Folge $\max\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$). Sei $\overline{B}_r(y) \subset \Omega$, w_k die harmonische Fortsetzung von v_k auf $B_r(y)$, d.h.,

$$w_k(z) = \begin{cases} v_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z, t) v_k(t) d\mathcal{H}^{n-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y). \end{cases} \quad (2.169)$$

Aus Lemma 2.36(ii) folgt, dass w_k subharmonisch ist und $v_k \leq w_k$, insbesondere $w_k \in S_g$. Deshalb gilt $v_k \leq w_k \leq u$, insbesondere konvergiert $w_k(y)$ gegen $u(y)$. Aus der Monotonie der Folge v_k folgt leicht die Monotonie der Folge w_k .

Aus der Monotonie der Folge w_k folgt, dass w_k gegen eine harmonische Funktion U gleichmäßig in $B_{r/2}(y)$ konvergiert. Beweis davon: Wir wissen, dass $w_k(y)$ eine Cauchy-Folge ist. Sei $k \leq h$. Da $w_h - w_k \geq 0$, und $\Delta(w_h - w_k) = 0$ auf $B_r(y)$, folgt aus der Harnack-Ungleichung (Satz 2.12), dass

$$\max(w_h - w_k)(\overline{B_{r/2}(y)}) \leq C \min(w_h - w_k)(\overline{B_{r/2}(y)}) \leq C(w_h(y) - w_k(y)). \quad (2.170)$$

Deshalb ist w_h eine Cauchy-Folge in $C(\overline{B_{r/2}(y)})$ und konvergiert gleichmäßig gegen U . Da U die Mittelwerteigenschaft hat, ist sie harmonisch (Satz 2.6 oder Lemma 2.35(iii)). Ferner, $U(y) = u(y)$ und $U \leq u$ auf $B_{r/2}(y)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $U = u$ auf $B_{r/2}(y)$. Falls nicht, dann gäbe es ein $p \in B_{r/2}(y)$, so dass $U(p) < u(p)$. Dann gäbe es ein $V \in S_g$ mit

$$U(p) < V(p). \quad (2.171)$$

Sei $\tilde{v}_k = \max\{V, w_k\}$, und - wie oben -

$$\tilde{w}_k(z) = \begin{cases} \tilde{v}_k(z) & \text{falls } z \in \Omega \setminus B_r(y) \\ \int_{\partial B_r(y)} K_{B_r(y)}(z, t) \tilde{v}_k(t) d\mathcal{H}^{d-1}(t) & \text{falls } z \in B_r(y). \end{cases} \quad (2.172)$$

Die Folge \tilde{w}_k ist monoton, und $\tilde{w}_k(y) \rightarrow u(y)$. Deshalb konvergiert \tilde{w}_k gleichmäßig auf $B(y, r/2)$ gegen eine harmonische Funktion \tilde{U} . Aus $w_k \leq \tilde{w}_k$ folgt $U \leq \tilde{U}$ auf $B(y, r/2)$, mit $\tilde{U}(y) = U(y) = u(y)$ folgt (starkes Maximumprinzip oder Harnack) $\tilde{U} = U$, insbesondere $V(p) \leq \tilde{U}(p) = U(p)$, ein Widerspruch zu (2.171). \square

30.04.2019

Wir wenden uns den Randwerten zu.

Definition 2.39. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x_* \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C(\bar{\Omega})$ heißt Barriere in x_* wenn:

- (i) $w(x_*) = 0$ und $w > 0$ auf $\bar{\Omega} \setminus \{x_*\}$;
- (ii) w ist superharmonisch in Ω , d.h., (2.157) gilt.

Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ heißt regulär, wenn eine Barriere in x_* existiert.

Lemma 2.40. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $g \in C(\partial\Omega)$, $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \quad (2.173)$$

definiert. Ist $x_* \in \partial\Omega$ regulär, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} u(x) = u(x_*) = g(x_*). \quad (2.174)$$

Beweis. Sei w eine Barriere für x_* . Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so dass gilt:

$$|g(x) - g(x_*)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(x_*) \cap \partial\Omega. \quad (2.175)$$

Sei

$$C = \frac{2 \max |g|(\partial\Omega)}{\min w(\bar{\Omega} \setminus B_\delta(x_*))}. \quad (2.176)$$

Dann gilt, für alle $x \in \partial\Omega$,

$$|g(x) - g(x_*)| \leq \varepsilon + Cw(x), \quad (2.177)$$

und deshalb

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega. \quad (2.178)$$

Die erste Funktion ist subharmonisch und deshalb in S_g enthalten, es folgt dass

$$g(x_*) - Cw(x) - \varepsilon \leq u(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.179)$$

Die Funktion $x \mapsto g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon$ ist superharmonisch. Für alle $v \in S_g$ gilt

$$v(x) \leq g(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega. \quad (2.180)$$

Mit Lemma 2.36(i) folgt

$$v(x) \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (2.181)$$

und aus der Definition von u folgt

$$u(x) = \sup\{v(x) : v \in S_g\} \leq g(x_*) + Cw(x) + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (2.182)$$

Deshalb gilt:

$$\limsup_{x \rightarrow x_*} |u(x) - g(x_*)| \leq \varepsilon + \lim_{x \rightarrow x_*} Cw(x) = \varepsilon \quad (2.183)$$

für alle $\varepsilon > 0$. □

Satz 2.41. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.184)$$

ist genau dann für beliebige $g \in C(\partial\Omega)$ lösbar, wenn alle Punkte $x_ \in \partial\Omega$ regulär sind.*

Beweis. Falls alle $x_* \in \partial\Omega$ regulär sind, wurde Existenz in Satz 2.38 und Lemma 2.40 bewiesen.

Falls das Dirichletproblem lösbar ist, und $x_* \in \partial\Omega$, dann ist die Lösung von $\Delta u = 0$, $u(x) = |x - x_*|$ auf $\partial\Omega$ eine Barriere in x_* . □

Definition 2.42. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt die äußere Sphärenbedingung in $x_* \in \partial\Omega$ wenn $y \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ existieren, so dass*

$$\overline{B_r(y)} \cap \bar{\Omega} = \{x_*\}. \quad (2.185)$$

Lemma 2.43. *Falls die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in $x_* \in \partial\Omega$ die äußere Sphärenbedingung erfüllt, dann ist x_* ein regulärer Punkt.*

Beweis. Sei

$$u(x) = \Phi(x_* - y) - \Phi(x - y). \quad (2.186)$$

Dann gilt $u \geq 0$ auf $\bar{\Omega}$, und u ist auf Ω harmonisch. □

Beispiel. Jede konvexe Menge erfüllt überall eine Sphärenbedingung, sowie jede Menge deren Rand C^2 -regulär ist.

Lemma 2.44. Ein Punkt $x \in \partial\Omega$ ist genau dann regulär, wenn er als Randpunkt von $B_\rho(x) \cap \overline{\Omega}$ regulär ist.

Beweis. Sei $x \in \partial\Omega$ regulär, $w \in C(\overline{\Omega})$ eine Barriere. Dann ist die Einschränkung von w auf $\overline{\Omega} \cap \overline{B_\rho(x)}$ auch eine Barriere.

Sei jetzt w als Randpunkt von $\Omega \cap B_\rho(x)$ regulär, und sei $w \in C(B_\rho(x) \cap \overline{\Omega})$ superharmonisch, nichtnegativ, $w = 0$ genau bei x . Falls $\partial B_\rho(x) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, dann kann man $w = 1$ auf $\overline{\Omega} \setminus B_\rho(x)$ setzen. Sonst gilt $m = \min w(\partial B_\rho(x) \cap \overline{\Omega}) > 0$, und man definiert

$$\tilde{w}(y) = \begin{cases} m & \text{falls } y \in \overline{\Omega} \setminus B_\rho(x), \\ \min\{m, w(y)\} & \text{falls } y \in \overline{\Omega} \cap B_\rho(x). \end{cases} \quad (2.187)$$

Aus dieser Definition folgt leicht, dass $\tilde{w} \in C(\overline{\Omega})$, $\tilde{w}(x) = 0$, $\tilde{w}(y) > 0$ für alle $y \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}$.

Es bleibt zu zeigen, dass \tilde{w} superharmonisch ist. Sei $B_r(y) \subset \Omega$. Falls $y \notin B_\rho(x)$ dann gilt:

$$m = \tilde{w}(y) = \int_{\partial B_r(y)} m \, d\mathcal{H}^{n-1} \geq \int_{\partial B_r(y)} \tilde{w} \, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (2.188)$$

weil $\tilde{w} \leq m$ überall.

Falls $y \in B_\rho(x)$, sei z die harmonische Fortsetzung von \tilde{w} auf $B_r(y)$. Es reicht zu zeigen, dass $z(y) \leq \tilde{w}(y)$. Auf $B_r(y) \cap B_\rho(x)$ ist \tilde{w} superharmonisch, und $z = \tilde{w}$ auf dem Rand. □

Lemma 2.45. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. $x_* \in \partial\Omega$ ist regulär, falls $r > 0$ und $n \in \mathbb{R}^2$ mit $|n| = 1$ existieren so dass

$$x_* + tn \notin \Omega \quad \text{für } 0 \leq t < r.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_* = 0$ und $n = -(1, 0)^T$. Wir definieren

$$w(x) = \operatorname{Re} \sqrt{x_1 + ix_2}$$

□

Bemerkung. Die Sphärenbedingung ist nicht notwendig. Ein Punkt $x_* \in \partial\Omega$ erfüllt eine äußere Kegelbedingung, wenn ein offener Ball $B_r(y)$ existiert, so dass $\operatorname{conv}(\{x_*\} \cup B_r(y)) \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$. (für $A \subset \mathbb{R}^d$ ist $\operatorname{conv} A$ die kleinste konvexe Menge, die A enthält). Die äußere Kegelbedingung reicht, und ist insbesondere in jedem Gebiet erfüllt, deren Rand Lipschitz-stetig ist. Die ist aber ebenfalls nicht notwendig.

Lemma 2.46. Sei $\alpha > 0$, $C = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : |x| < 1, x_n < \alpha|x'|\}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Falls $x_* \in \partial\Omega$ so ist, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $B(r, x_*) \cap \Omega \subset x_* + QC$, wobei $Q \in SO(n)$ eine Rotation ist, dann gibt es eine Barriere in x_* .

Beweis. Wir können annehmen, dass $x_* = 0$ und $Q = \text{Id}$. Wir werden eine Funktion u auf C konstruieren. Es ist leicht zu sehen, dass alle Punkte $x_* \in \partial C \setminus \{0\}$ die äußere Sphärenbedingung erfüllen.

Sei $g(x) = |x|$, $g \in C(\partial C)$, und $u = \sup S_g$ wie in Satz 2.38. Dann folgt $0 \leq u \leq 1$ und $\Delta u = 0$ in C . Mit Lemma 2.40 folgt $u = g$ on $\partial C \setminus \{0\}$ und $u \in C(\overline{C} \setminus \{0\})$.

Aus Lemma 2.36(i) folgt, dass $u < 1$ in C .

Sei $\omega = C \cap B_{1/2}$, $v : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $v(x) = u(2x)$ definiert. Sei $a = \max u(\overline{C} \cap \partial B_{1/2})$. Dann ist $1/2 \leq a < 1$. Da $v = 1$ auf $C \cap \partial B_{1/2}$ und $u = \frac{1}{2}v$ auf $(\partial\omega) \cap B_{1/2}$, folgt $u \leq av$ auf $\partial\omega$.

Wir zeigen jetzt, dass $u \leq av$ in ω . Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = av + \varepsilon\Phi$. Da u und av beschränkt sind, gibt es $\delta > 0$, so dass $u \leq w_\varepsilon$ auf $\omega \cap \partial B_\delta$. Mit $u, w_\varepsilon \in C(\overline{\omega \setminus B_\delta})$ folgt $u \leq w_\varepsilon$ in $\omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $u \leq av$ in ω .

Wir haben gezeigt, dass für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \leq a \sup v(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) = a \sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-(k-1)}}). \quad (2.189)$$

Daraus folgt $\sup u(\overline{C} \cap B_{2^{-k}}) \leq a^k$. Mit $u \geq 0$ folgt, dass $u(0) = 0$ und u im Punkt 0 stetig ist. Aus dem starken Maximumprinzip folgt, dass $u > 0$ in C . Deshalb ist u eine Barriere. \square

03.05.2019

Lemma 2.47. Es gibt eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $g \in C(\partial\Omega)$ so dass das Problem $\Delta u = 0$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$, keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ hat.

Beweis. Sei $\omega = B_1(0) \setminus ([0, 1] \times \{0\}^2) \subset \mathbb{R}^3$,

$$u(x) = 4\pi \int_0^1 \Phi(x - te_1) t dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} t dt. \quad (2.190)$$

Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ in Ω . Da

$$\frac{d}{dt} \left[\sqrt{(t-x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_1 \operatorname{arsinh} \left(\frac{t-x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \right) \right] = \frac{t}{\sqrt{(x_1-t)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

folgt

$$u(x) = |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \operatorname{arsinh} \frac{1-x_1}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} + |x_1| \operatorname{arsinh} \frac{|x_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}.$$

Aus

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x)$$

folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \ln\left(\frac{1 - x_1 + |x - e_1|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}\right) + |x_1| \ln\left(\frac{|x_1| + |x|}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}\right) \\ &= |x - e_3|^2 - |x|^2 - x_1 \ln(1 - x_1 + |x - e_1|) + |x_1| \ln(|x_1| + |x|) - (x_1)_+ \ln(x_2^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$u(x) = \begin{cases} v(x) - x_1 \ln(x_2^2 + x_3^2) & \text{falls } x_1 \geq 0 \\ v(x) & \text{falls } x_1 < 0 \end{cases} \quad (2.191)$$

wobei v beschränkt und stetig ist.

Daraus folgt insbesondere, dass u nicht stetig ist. Es gilt sogar: In jeder Menge $B_r(0) \cap \{x_1 > 0\} \cap x_2^2 + x_3^2 > 0$ hat

$$-x_1 \ln(x_2^2 + x_3^2)$$

ganz $(0, \infty)$ als Wertebereich.

Sei $k > 2 \sup v(B_1(0))$. Sei $\Omega = B_1(0) \cap \{u < k\}$. Sei $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g = u$ auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$, und $g(0) = k$ definiert. Aus $u = k$ auf $\partial\Omega \cap B_1 \setminus \{0\}$ folgt $g \in C(\partial\Omega)$.

Wir wollen zeigen, dass keine Lösung $w \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von $\Delta w = 0$ und $w = g$ existiert.

Sei w eine solche Lösung. Für $\varepsilon > 0$ sei $w_\varepsilon = w + \varepsilon\Phi$. Da u auf Ω beschränkt ist, $\Phi > 0$ überall, und $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \infty$, gibt es $\delta > 0$ so dass $w_\varepsilon \geq u$ auf $\partial(\Omega \setminus B_\delta)$. Da $w_\varepsilon - u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$ harmonisch und auf $\overline{\Omega \setminus B_\delta}$ stetig ist, folgt $w_\varepsilon \geq u$ auf $\Omega \setminus B_\delta$. Da ε beliebig war, folgt $w \geq u$ auf Ω . Analog (mit $w - \varepsilon\Phi$) zeigt man $w \leq u$. Deshalb $w = u$. Das kann aber nicht sein, weil w in $\overline{\Omega}$ stetig ist, u nicht. \square

2.6 Harmonische Polynome und Kugelflächenfunktionen

2.6.1 Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten

Wir schreiben $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$.

Definition 2.48. Wir sagen, $f : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist k mal stetig differenzierbar, wenn

$$\tilde{f}(x) = f(x/|x|) \in C^k(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$$

Der Laplace-Beltramioperator von \mathbb{S}^{d-1} ist die lineare Abbildung

$$\Delta_{\mathbb{S}} : C^2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow C(\mathbb{S}^{d-1})$$

$$\Delta_{\mathbb{S}} f(x) = \Delta \tilde{f}(x).$$

Wir bezeichnen die radiale Ableitung mit ∂_r , d.h.

$$\partial_r f(x) = \sum_{j=1}^d \frac{x_j}{|x|} \partial_j f(x)$$

für $x \neq 0$ und f differenzierbar.

Ist $f \in C^k(\mathbb{R}^{d-1})$ dann ist definiert für jedes $r > 0$ $f_r(x) = f(rx/|x|)$ eine Funktion in $C^k(\mathbb{S}^{d-1})$. Wir definieren für $f \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

$$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) = (\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f_r)(x/r)$$

mit $r = |x|$.

Lemma 2.49 (Laplace in Polarkoordinaten). *Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Dann ist*

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{d-1}{r} \partial_r f + r^{-2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f$$

Beweis. Das folgt mit einer Rechnung: Sei $|x_0| = r_0 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= (\Delta(f - f_{r_0}))(x_0) + \Delta f_{r_0}(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 (f - f_{r_0})(x_0) + r_0^{-2} (\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f)(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} (f - f_{r_0})(x_0) &= (\partial_{x_j} f - \partial_{x_j} f(r_0 x/|x|))|_{x_0} \\ &= \partial_{x_j} f(x_0) - \partial_{x_j} f(x_0) + \frac{x_j}{r_0} \partial_{x_j} f(x_0) \\ &= \frac{x_j}{r_0} \partial_r f(x_0) \end{aligned}$$

sowie mit $r = |x|$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \left(\frac{x_j}{r} \partial_r f \right) &= \partial_r^2 f + \left(\frac{d}{r} - \sum_{j=1}^d \frac{x_j}{r^2} \partial_{x_j} r \right) \partial_r f \\ &= \partial_r^2 f + \frac{d-1}{r} \partial_r f(x). \end{aligned}$$

□

Für $d = 2$ erhalten wir mit $x = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + r^{-2} \partial_\phi^2 f$$

Für $d = 3$ verwenden wir Kugelkoordinaten $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$,

$$x = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{d-1}{r} \partial_r u + r^{-2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta u + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u \right)$$

und erhalten für den Laplace-Beltramioperator

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} u = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta u + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u \quad (2.192)$$

Ähnliche Formeln kann man mit mehr Mühe für beliebige Dimensionen erhalten.

2.6.2 Harmonische Polynome

Definition 2.50. Wir nennen $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ homogen vom Grad $m \in \mathbb{R}$, falls

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x).$$

Wir nennen das Polynom p homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, falls es homogen vom Grad m ist.

Lemma 2.51 (Euler). Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. f ist genau dann homogen vom Grad m falls gilt

$$\sum_{j=1}^d x_j \partial_{x_j} f = m f \quad (2.193)$$

Beweis. Sei f homogen vom Grad m . Dann ist

$$\sum_{j=1}^d x_j \partial_{x_j} f(x) = \frac{d}{dt} f(tx) \Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} (t^m f(x)) \Big|_{t=1} = m f(x)$$

Umgekehrt gelte (2.193). Dann folgt mit $g(x) = |x|^{-m} f(x)$

$$\frac{d}{dt} g(tx) = 0$$

und damit ist g homogen vom Grad 0 und f homogen vom Grad m . \square

Ein homogenes Polynom vom Grad m lässt sich eindeutig als Summe von Monomen x^α mit $|\alpha| = m$ schreiben. Der Homogenitätsgrad ist immer in \mathbb{N} . Wir bezeichnen den Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad m mit P_m .

Lemma 2.52. Die Dimension des Vektorraums P_m^d ist $\binom{m+d-1}{d-1}$.

Beweis. Wir müssen die Multiindizes einer festen Länge zählen. Für $d = 1$ erhalten wir immer 1. Das ist der Induktionsanfang. Die Formel gelte in Dimension $d - 1$. Dann zählen wir

$$\sum_{j=0}^m \binom{m-j+d-1}{d-2} = \binom{m+d-1}{d-1}$$

mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks. □

Definition 2.53. Wir bezeichnen den Raum der harmonischen Polynome in P_m^d mit H_m^d .

Lemma 2.54. Sei $p \in P_M^d$. Wir schreiben $p(x) = |x|^m f(x/|x|)$ mit $f(x) = p(x)$ für $x \in \mathbb{S}^{d-1}$. Dann gilt

$$\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} f + m(m+d-2)f = 0.$$

Ist $f \in H_{m_1}^d$ und $g \in H_{m_2}^d$ mit $m_1 \neq m_2$ then

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} fgd\mathcal{H}^{d-1} = 0 \tag{2.194}$$

Beweis.

$$0 = \Delta p = \partial_r^2 p + \frac{d-1}{r} \partial_r p + r^{-2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} p = r^{-2} (m(m-1) + (d-1)m) p + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} p.$$

Der zweite Teil folgt mit dem Satz von Euler und dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} m_1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} fgd\mathcal{H}^{d-1} &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^d x_j \partial_j f \right) gd\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \langle x, g \nabla f \rangle d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{B_1(0)} \nabla \cdot (g \nabla f) dx \\ &= \int_{B_1(0)} \nabla f \cdot \nabla g dx \\ &= m_2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} fgd\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned}$$

hence $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} fgd\mathcal{H}^{d-1} = 0$. □

Interpretation: $-\Delta_{\mathbb{S}}$ hat die Eigenwerte

$$m(m+d-2) = \left(m + \frac{d-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-2}{2}\right)^2$$

Wir definieren auf P_m^d ein Skalarprodukt durch

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \alpha! & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$T : P_m^d \rightarrow P_{m+2}^d, \quad T(p) = |x|^2 p(x)$$

und

$$\Delta : P_{m+2}^d \rightarrow P_m^d$$

Lemma 2.55.

$$\langle Tp, q \rangle = \langle p, \Delta q \rangle$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für Monome zu verifizieren. Seien α ein Multiindex. Da

$$Tx^\alpha = \sum_{j=1}^d x_j^2 x^\alpha$$

und

$$\langle Tx^\alpha, x_j^2 x^\alpha \rangle = \langle x_j^2 x^\alpha, x_j^2 x^\alpha \rangle = (\alpha_j + 2)(\alpha_j + 1) \langle x^\alpha, x^\alpha \rangle = \langle x^\alpha, \Delta x^{\alpha+2e_j} \rangle.$$

□

Satz 2.56. Die Teilräume H_{m+2}^d und TP_m^d sind orthogonal in P_{m+2}^d . Sie spannen P_{m+2}^d auf.

Beweis. Orthogonalität folgt aus Lemma 2.55. Sei jetzt $w \in P_{m+2}^d$ orthogonal zu TP_m^d . Dann ist wieder mit Lemma 2.55 $\Delta w = 0$. □

07.05.2019

Korollar 2.57. Die Dimension H_m^d ist $\binom{m+d-1}{d-1} - \binom{m+d-3}{d-1}$.

- $d = 2$: $\binom{m+1}{1} - \binom{m-1}{1} = m + 1 - (m - 1) = 2$,

$$(\operatorname{Re}(x_1 + ix_2))^m, \operatorname{Im}(x_1 + ix_2)^m$$

ist eine Basis.

- $d = 3$: $\binom{m+2}{2} - \binom{m}{2} = \frac{1}{2}((m+2)(m+1) - m(m-1)) = 2m + 1$. Eine Basis für $m = 0$ ist 1, für $m = 1$ ist (x_1, x_2, x_3) und für $m = 3$

$$x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2$$

bzw

$$\operatorname{Re}(x_1+ix_2)^3, \operatorname{Im}(x_1+ix_2)^3, \operatorname{Re}(x_1+ix_2)^2x_3, \operatorname{Im}(x_1+ix_2)^2x_3, \operatorname{Re}(x_1+ix_2)(3x_3^2 - (x_1^2+x_2^2)),$$

$$\operatorname{Im}(x_1+ix_2)(3x_3^2 - (x_1^2+x_2^2)), 5x_3^3 - 3(x_1^2+x_2^2)x_3$$

Satz 2.58. Die harmonischen Polynome sind dicht in $L^p(\mathbb{S})$ für $1 \leq p < \infty$

Beweis. Aus der Analysis III wissen wir, dass stetige Funktionen in $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$ dicht sind. Sei $f \in C(\mathbb{S}^{d-1})$. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass existieren Polynome, die in \mathbb{S}^{d-1} gleichmässig gegen f konvergieren, und damit auch in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 2.55 können wir jedes Polynom in P_m^d auf \mathbb{S} als Summe homogenen harmonischer Polynome schreiben ($|x| = 1$). Daraus folgt die Aussage. \square

2.6.3 Orthonormalbasen in H_m^d

Die Vektorräume H_M^d versehen wir mit dem Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{S})$. In jedem Raum können wir eine Orthonormalbasis wählen und erhalten eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{H}^{d-1})$.

Die Einschränkung der harmonischen homogenen Polynome auf die Sphäre werden Kugelflächenfunktionen genannt.

Wir beschränken uns auf den Fall $d = 2, 3$.

2.6.4 Der Fall $d = 2$

Eine Orthonormalbasis in H_m^d ist durch (mit $w = x_1 + ix_2$)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} w^m, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} w^m.$$

Wenn wir \mathbb{S}^1 mit $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ parametrisieren, dann hat die Basis die Form

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(m\alpha), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(m\alpha)$$

für $m \geq 1$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ für $m = 0$ gegeben.

2.6.5 Der Fall $d = 3$ und $m \geq 1$.

Wir machen den Ansatz

$$(\operatorname{Re} w^m, \operatorname{Im} w^m, \operatorname{Re}(w^{m-1})p_m^{m-1}(t), \operatorname{Re}(w^{m-2})p_m^{m-2}(t), \dots, p_m(t)) \quad (2.195)$$

mit Funktionen p_m^n für eine Basis. Wir berechnen mit Hilfe von 2.192

$$p_m^n(t) = Q_m^n(\theta)$$

$$\partial_\theta^2 Q_m^n + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta Q_m^n + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right) Q_m^n = 0$$

und daher mit $t = \cos(\theta)$,

$$\partial_\theta Q_m^n = -\sin(\theta) \partial_t p_m^n, \quad \partial_\theta^2 Q_m^n = (1-t^2) \partial_t^2 p_m^n - t \partial_t p_m^n$$

and

$$(1-t^2)(p_m^n)'' - 2t(p_m^n)' + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-t^2} \right) p_m^n = 0 \quad (2.196)$$

Die Gleichung mit $n = 0$,

$$\frac{d}{dt} \{ (1-t^2) p_m'(t) \} + m(m+1) p_m(t) = 0 \quad (2.197)$$

heißt Legendredifferentialgleichung.

Lemma 2.59. *Die Legendrepolynome*

$$p_m(t) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dt^m} [(t^2 - 1)^m]$$

lösen die Legendredifferentialgleichung. Sie genügen $p_m(1) = 1$.

Beweis. Die Fall $m = 0$ ist trivial. Wir schreiben die Legendredifferentialgleichung als

$$(x^2 - 1)p_m' = m(m+1) \int_1^t p_m(s) ds$$

und verifizieren mit $f_m = (t^2 - 1)^m$

$$(t^2 - 1)f_m^{(m+1)} = m(m+1)f_m^{(m-1)}$$

Dazu beobachten wir

$$(t^2 - 1)f_m' = 2tmf_m$$

was wir m mal differenzieren.

$$(t^2 - 1)f_m^{(m+1)} + 2mtf_m^{(m)} + \binom{m}{2} f_m^{(m-1)} = 2tmf_m^{(m)} + 2m^2 f_m^{(m-1)}.$$

□

Wir machen den Ansatz mit der sogenannten erzeugenden Funktion

$$F(t, u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + u^2}}$$

und verifizieren

$$\begin{aligned} & \partial_t \left((1 - t^2) \partial_t F(t, u) \right) + u \partial_u^2 (u F(t, u)) \\ &= \partial_t \left(\frac{(1 - t^2)u}{(1 - 2tu + u^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + u \partial_u \left(\frac{1 - tu}{(1 - 2tu + u^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{3(1 - t^2)u^2 - 2tu(1 - 2tu + u^2)}{(1 - 2tu + u^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(1 - tu)(tu - u^2) - tu(1 - 2tu + u^2)}{(1 - 2tu + u^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 3 \frac{(1 - t^2)u^2 - tu(1 - 2tu + u^2) + (1 - tu)(tu - u^2)}{(1 - 2tu + u^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist

$$F(t, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{p}_m(t) u^m$$

und \tilde{p}_m löst die Legendredifferentialgleichung. Da

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n, \quad \frac{1}{1 + r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$$

gilt $\tilde{p}_m(1) = 1$.

Lemma 2.60.

$$p_m(t) = \tilde{p}_m(t)$$

Beweis. Mit Hilfe der Wronskideterminante kann man sehen, dass es keine zweite linear unabhängige Lösung in einer Umgebung von ± 1 gibt: Seien f und g Lösungen der Legendredifferentialgleichung und $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Dann ist

$$W'(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t) = \frac{2t}{1 - t^2} W(t)$$

und

$$W(t) = c \exp\left(-\int_0^t \frac{2\tau}{(\tau + 1)(\tau - 1)} d\tau\right)$$

wobei

$$\int_0^t \frac{2\tau}{(\tau + 1)(\tau - 1)} d\tau = \int_0^t \frac{1}{\tau + 1} + \frac{1}{\tau - 1} d\tau = \ln(1 + t) + \ln(1 - t)$$

und

$$W(t) = c \frac{1}{1-t^2}.$$

Ist $f = P_m$ (und g linear unabhängig, also $c \neq 0$) so erhalten wir

$$g' = \frac{p'_m}{p_m} g + c \frac{1}{p_m(1-t^2)}.$$

Da $p'_m(1) \neq 0$ kann g nur das triviale Polynom sein. Also ist \tilde{p}_m ein Vielfaches von p_m . Die Werte in $t = 1$ stimmen überein. \square

Lemma 2.61. *Die zugeordneten Legendrefunktionen*

$$p_m^n = (-1)^n (1-t^2)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} p_m$$

sind Lösungen von (2.196).

Wir erhalten Polynome für die Kugelflächenfunktionen.

Beweis. Aufwendige Rechnung. \square

Satz 2.62. *Sei $n \geq 0$. Die Funktionen*

$$u_{m,n}(t) = \sqrt{\frac{2m+1}{2} \frac{(m-n)!}{(m+n)!}} P_m^n(t)$$

für $0 \leq n \leq m$ bilden eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2((0,1))$.

Beweis. Da Polynome dicht in $L^2((-1,1))$ sind und der Grad von $u_{m,n}$ für n gerade $m-n$ ist bilden diese Polynome eine Basis für alle Polynome. Ist n ungerade, so müssen wir die Argumentation leicht ändern und bezüglich $(1-t^2)dm$ integrieren.

Sie sind orthogonal, aufgrund von Lemma 2.55. Die Aussage folgt aus

$$\int_{-1}^1 (p_m^n(t))^2 dt = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \quad (2.198)$$

Wir zeigen zunächst

$$\int_{-1}^1 p_n p_m dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^m}{dt^m} (t^2-1)^m \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n dt = \int_{-1}^1 ((t^2-1)^m)^{(m+n)} (1-t^2)^n dt$$

was Null ist, falls $n > m$ und $2^{2n}(2n)! \int_1^1 (1-t^2)^n dt$ für $n = m$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = (n-1) \int_{-1}^1 2t(1-t^2)^{n-2} \left(t - \frac{1}{3}t^3\right) dt \\ &= \frac{2(n-1)}{3} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt - \frac{4(n-1)}{3} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1} dt + \frac{4(n-1)}{3} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-2} dt \\ &= \frac{2(n-1)}{3} I_n - \frac{4(n-1)}{3} I_{n-1} - \frac{4(n-1)}{3} I_{n-2} \end{aligned}$$

und damit

$$0 = (2n-5)I_n - 4(n-1)I_{n-1} - 4(n-1)I_{n-2}$$

woraus sich das Integral rekursiv bestimmen läßt.

Fast genauso sieht man für $m_1 \neq m_2$

$$\int_{-1}^1 p_{m_1}^n p_{m_2}^n dt = 0.$$

Die Auswertung von

$$\int_{-1}^1 (p_m^n)^2 dt$$

ist mühsam und wird nicht durchgeführt.

□

10.05.2019

Lemma 2.63. *Je zwei Funktionen in (2.195) sind orthogonal in $L^2(\mathbb{S})$.*

Beweis. Wir parametrisieren \mathbb{S}^2 bis auf eine Nullmenge durch

$$(-1, 1) \times (0, 2\pi) \ni (t, \phi) \rightarrow \psi(t, \phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \cos \phi \\ \sqrt{1-t^2} \sin \phi \\ t \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \cos \phi & -\sqrt{1-t^2} \sin \phi \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin \phi & \sqrt{1-t^2} \cos \phi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$D\psi^T D\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & 0 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$f_{nm}^T = p_m^n(x_3) \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^n$$

und

$$f_{nm}^i = p_m^n(x_3) \operatorname{Im}(x_1 + ix_2)^n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} f_{n_1 m_1}^r f_{n_2 m_2}^r d\mathcal{H}^2 &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p_{m_1}^{n_1}(t) p_{m_2}^{n_2}(t) \cos(n_1 \phi) \cos(n_2 \phi) d\phi dt \\ &= \int_{-1}^1 p_{m_1}^{n_1}(t) p_{m_2}^{n_2}(t) dt \int_0^{2\pi} \cos(n_1 \phi) \cos(n_2 \phi) d\phi \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n_1 \phi \cos n_2 \phi d\phi &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \neq n_2 \\ \pi & \text{falls } n_1 = n_2 \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \sin n_1 \phi \sin n_2 \phi d\phi &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n_1 \neq n_2 \\ \pi & \text{falls } n_1 = n_2 \end{cases}, \\ \int_0^{2\pi} \cos n_1 \phi \sin n_2 \phi d\phi &= 0 \end{aligned}$$

erhalten wir nur dann etwas von Null verschiedenes wenn $n_1 = n_2$. In diesem Fall folgt die Aussage aus Lemma 2.62. □

2.7 Holomorphe Funktionen und komplexe Differentialgleichungen

2.7.1 Wege und Zusammenhang

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Ein parametrisierter Weg in A ist eine stetige Abbildung eines Intervalls I nach A . Die Bildpunkte $(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in I\}$ nennen wir die Bahn des Weges. Sind I, J Intervalle $\Phi : J \rightarrow I$ ein monoton wachsender Homöomorphismus, $\gamma : I \rightarrow A$ ein Weg, dann ist $\gamma \circ \phi : J \rightarrow A$ ein Weg mit $(\gamma) = (\gamma \circ \phi)$. Die Wege unterscheiden sich nur durch die Parametrisierung.

Ein Weg ist Äquivalenzklasse von parametrisierten Wegen, die sich nur durch die Parametrisierung unterscheiden.

Jeder Weg wird in einer Richtung durchlaufen. Wir bezeichnen die Richtung auch mit Orientierung.

Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2]$ Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, so können wir die Wege zu dem parametrisierten Weg

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1] \end{cases}$$

zusammensetzen.

Die Menge A heißt wegzusammenhängend, wenn es zu $x, y \in A$ einen parametrisierten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Ist $I = [a, b]$ und γ ein parametrisierter Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, so nennen wir den Weg geschlossen. Wir identifizieren geschlossene Wege mit Äquivalenzklassen von stetigen Abbildungen $\mathbb{S}^1 \rightarrow A$.

Wir sagen, A ist einfach zusammenhängend, wenn es zu jedem geschlossenen Weg $\gamma \in C(\mathbb{S}^1, A)$ eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma} \in C(\overline{B_1(0)})$ gibt mit $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ für $|x| = 1$.

Lemma 2.64. *Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei A sternförmig bezgl. $x_0 \in A$ und $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow A$ ein geschlossener Weg. Wir definieren

$$\tilde{\gamma}(y) = x_0 + |y|(\gamma(y/|y|) - x_0) \in A.$$

□

Wir nennen einen Weg k mal stetig differenzierbar, wenn es eine k mal stetig differenzierbare Parametrierung γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ gibt. Wir betrachten in diesem Fall Äquivalenzklassen, wobei ϕ dann ein monoton wachsender C^k Diffeomorphismus ist.

Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und einfach zusammenhängend, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ ein geschlossener Weg mit $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$, so existiert ein $\tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$ mit $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ für $|x| = 1$: Da U einfach zusammenhängend ist, existiert $\tilde{\gamma}_0 \in C(\overline{B_1(0)})$. Sei $\varepsilon > 0$. Mit dem Approximationssatz von Weierstraß existiert ein Polynom $\tilde{\gamma}_1$ mit $|\tilde{\gamma}_0(x) - \tilde{\gamma}_1(x)| < \varepsilon/2$ für $|x| \leq 1$. Sei $\eta \in C^\infty$ monoton wachsend, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 1$ (Analysis III). Wir definieren für λ groß

$$\tilde{\gamma}(x) = \eta(1 - \lambda(1 - |x|))\gamma(x/|x|) + \left(1 - \eta(1 - \lambda(1 - |x|))\right)\tilde{\gamma}_1(x)$$

wobei wir $x = (\cos t, \sin t)^T$ mit t identifizieren. Dann ist $\tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$, das Bild liegt in U falls δ klein ist und $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x)$ für $|x| = 1$. Eine analoge Aussage gilt für stückweise C^1 Wege. Bei der Umkehrung der Orientierung ändert sich das Vorzeichen.

Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C(U; \mathbb{R}^d)$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma \in C^1([a, b]; U)$. Dann ist das Wegintegral durch

$$\int_\gamma F d\vec{x} = \int_a^b \sum_{j=1}^d F_j(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

definiert. Dieses Integral hängt nur vom Weg und der Orientierung, aber nicht von der Parametrisierung ab. Es ist linear im Integranden und additiv unter der Zusammensetzung von Wegen.

Definition 2.65. *Ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ heißt rotationsfrei, falls*

$$\partial_{x_j} F_k(x) = \partial_{x_k} F_j(x).$$

Satz 2.66. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und einfach zusammenhängend und $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ rotationsfrei. Dann sind Integrale über geschlossene stückweise C^1 Wege immer Null. Es existiert eine Stammfunktion $\Phi \in C^2(\Omega)$, d.h.

$$\partial_{x_j} \Phi(x) = F_j(x).$$

Beweis. Sei $\gamma \in C^1([a, b])$ ein geschlossener Weg. Da Ω einfach zusammenhängend ist existiert $\tilde{\gamma}(x) \in C^1(\overline{B_1(0)})$ wie oben. Mit der Konstruktion ist $r\partial_r \tilde{\gamma} \in C^1(\overline{B_1(0)})$

Sei $\gamma_r(t) = \tilde{\gamma}((r \cos(t), r \sin(t))^T)$ und

$$f(r) = \int_{\gamma_r} F d\vec{x}$$

Wir differenzieren nach r , verwenden den Satz von Schwarz um die Ableitungen zu vertauschen (Wir hatten nicht angenommen, dass $(r, t) \in \gamma_r(t)$ zweimal stetig differenzierbar ist, aber $(r, t) \rightarrow r\partial_r \gamma_r$ ist stetig differenzierbar, was ausreicht), und integrieren partiell, und verwenden am Ende die Wirbelfreiheit.

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^d F_j(\gamma_r(t)) \partial_t \gamma_{r,j}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d (\partial_{x_k} F_j)(\gamma_{r,j}(t)) \partial_r \gamma_{r,k} \partial_t \tilde{\gamma}_{r,j} + \sum_{j=1}^d F_j \partial_{rt}^2 \gamma_{r,j} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} F_j \partial_r \gamma_{r,k} \partial_t \gamma_{r,j} - \sum_{j=1}^d (\partial_t (F_j \circ \tilde{\gamma}_r)) \partial_r \gamma_{r,j} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} F_j \partial_r \gamma_{r,k} \partial_t \gamma_{r,j} - \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} F_k) \partial_t \gamma_{r,j} \partial_r \gamma_{r,k} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das gleiche Argument funktioniert für stückweise stetig differenzierbare Wege.

Die erste Aussage folgt mit $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} F d\vec{x} = 0$:

$$\left| \int_{\gamma_r} F d\vec{x} \right| = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |F(\gamma_r(t))| \int_0^{2\pi} |\partial_t \gamma_r(t)| dt$$

und

$$\partial_t \gamma_r(t) = \partial_t \tilde{\gamma}(r(\cos t, \sin t)^T) = r D\tilde{\gamma}(\gamma_r(t)) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0$$

gleichmässig in t .

Wir fixieren x_0 . Für alle $x \in \Omega$ existiert $\gamma \in C^1([0, 1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$. Wir definieren

$$\Phi(x) = \int_{\gamma} F d\vec{x}$$

Ist $\gamma_1 \in C^1([0, 1]; \Omega)$ ein zweiter Weg von x_0 nach x , so ist

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0, 1] \\ \gamma_1(2-t) & t \in (1, 2] \end{cases}$$

ist dann ein geschlossener stückweise C^1 Weg. Damit ist

$$0 = \int_{\gamma_2} F d\vec{x} = \int_{\gamma} F d\vec{x} - \int_{\gamma_1} F d\vec{x}.$$

Sei $1 \leq j \leq d$. Wir wählen einen Weg, der zuletzt in Richtung der j Achse mit Geschwindigkeit 1 verläuft. Dann ist mit dem Hauptsatz

$$\partial_{x_j} \Phi(x) = F_j(x).$$

□

Korollar 2.67. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Beweis. Das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} -x_2/|x|^2 \\ x_1/|x|^2 \end{pmatrix}.$$

ist wirbelfrei (Rechnung). Sei $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Das ist ein geschlossener Weg. Dann ist

$$\int_{\gamma} F d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi \neq 0$$

Wäre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend, so müßte dieses Integral verschwinden.

□

14.05.2019