Analysis 2

02.07.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 07.06.2018 in der Vorlesung

Nachträge zu nicht besprochenen Aufgaben

Das Ziel dieses Nachtrags ist es, die Vorlesungen in der Wiederholungsstunde nicht besprochenen Aufgaben vorzustellen.

Aufgabe 13. Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma g \,\mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} g(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos(t)\sin(t) - \sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sin^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + 1 + \cos(t) \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Wir bemerken nun:

$$\int \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t - \cos(t)\sin(t)), \quad \int \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2(t).$$

Hiermit finden wir sofort:

$$\int_\gamma g \,\mathrm{d}\vec{x} = 0.$$

Aufgabe 14. Es ist γ stetig differenzierbar. Wir berechnen

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos(t)) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$|\dot{\gamma}(t)| = r\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos(t)}.$$

Wir berechnen eine Stammfunktion von $t \mapsto \sqrt{1 - \cos(t)}$. Wir nützen das Additionstheorem für den Cosinus:

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \Rightarrow \cos(a) = \cos^2(a/2) - \sin^2(a/2) = 1 - 2\sin^2(a/2),$$

und damit

$$\sqrt{1 - \cos(a)} = \sqrt{2}|\sin(a/2)|.$$

Es ist

$$\int \sqrt{1 - \cos(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int |\sin(a/2)|\,\mathrm{d}a$$

Im Intervall $[0, 2\pi]$ ist $\sin(\cdot/2)$ positiv. Also

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}[-2\cos(t/2)]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\big(2+2\big) = 4\sqrt{2}.$$

Also insgesamt:

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}r4\sqrt{2} = 8r.$$

Zuletzt ein Nachtrag zu einem Satz aus einem Übungsblatt, wobei wir einige Aspekte zur Wiederholung ausführlich zu diskutieren:

Satz 1: **Kompakte Störungen von Diffeomorphismen**

Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, die außerhalb einer kompakten Menge K verschwinde. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $|\lambda| < \varepsilon$ die Abbildung $f + \lambda g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Ähnlich des Beweises des lokalen Umkehrsatzes bzw. Satzes über implizite Funktionen reicht es, den Fall $f = \mathrm{Id}$ zu betrachten. Wir nehmen zuerst $f = \mathrm{Id}$ an und zeigen: Es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$, sodass für alle $|\lambda| < \varepsilon_1$ gilt: Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $x_y \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_y) + \lambda g(x_y) = y$. Damit folgt sodann, dass für alle $|\lambda| < \varepsilon_1$ die Abbildungen $f + \lambda g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jeweils bijektiv sind. Hierzu sei

$$L := \max_{\mathbb{R}^n} |Dg|.$$

Ohne Einschränkung sei $L > 0$, da die Aussage sonst trivial ist. Man beachte, dass dieses Maximum tatsächlich existiert und endlich ist. In der Tat: Auf der kompakten Menge K nimmt $|Dg|$ als stetige Abbildung ihr Maximum an, und außerhalb K ist $|Dg| \equiv 0$. Wir wählen und fixieren irgendein $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2L}$. Es sei nun $|\lambda| < \varepsilon_1$.

Sei nun $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte die Abbildung $\Phi_y\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto y - \lambda g(x) \in \mathbb{R}^n$. Nun ist x genau dann Fixpunkt von Φ_y, wenn

$$\Phi_y(x) = x \Leftrightarrow y - \lambda g(x) = x \Leftrightarrow y = x + \lambda g(x) = f(x) + \lambda g(x).$$

Es ist Φ_y eine Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raums $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_{|\cdot|})$ in sich, wobei $d_{|\cdot|}$ die durch die euklidische Norm induzierte Metrik ist. Nun ist für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)| &\leq |\lambda| \int_0^1 |(Dg)(x_1 + t(x_2 - x_1)|\,\mathrm{d}t|x_2 - x_1| \\ &\leq |\lambda| L |x_2 - x_1| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.\end{aligned}$$

Also ist Φ_y Kontraktion mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2}$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert zu y als genau ein $x_y \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x_y) = x_y$.

Bemerkung: Man kann sich alternativ direkt Gedanken über die Injektivität machen. Nachweis der Injektivität. Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon_1 > 0$, sodass für alle $|\lambda| < \varepsilon$ die Abbildung $f + \lambda g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Wähle nun $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{L}$. Wir behaupten, dass in dieser Situation

$$\mathrm{Id} + \lambda g \text{ injektiv ist für alle } |\lambda| < \varepsilon_1.$$

Sei nämlich $|\lambda| < \varepsilon_1$. Angenommen, $\Phi := \mathrm{Id} + \lambda g$ ist nicht injektiv. Dann finden wir $x \in \mathbb{R}^n$ und $y = x + h \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(x) = \Phi(x + h)$. Dann ist

$$\begin{aligned}h &= (x + h) - x \\ &= \mathrm{Id}(x + h) - \mathrm{Id}(x) \\ &= \mathrm{Id}(x + h) + \lambda g(x + h) - \mathrm{Id}(x) - \lambda g(x) + \lambda(g(x + h) - g(x)) \\ &= \Phi(x + h) - \Phi(x) + \lambda(g(x + h) - g(x)) \\ &= \lambda(g(x + h) - g(x)) \qquad (\text{wegen } \Phi(x + h) = \Phi(x))\end{aligned}$$

und damit nach Kettenregel

$$|h| \leq |\lambda| \int_0^1 |(Dg)(x + th)|\,\mathrm{d}t|h| < |h|,$$

ein Widerspruch. Also ist für alle $|\lambda| < \varepsilon_1$ die Abbildung $f + \lambda g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv.

An diesem Punkt wissen wir bereits, dass die Umkehrabbildung $(f+\lambda g)^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert für alle $|\lambda| < \varepsilon_1$. Außerdem wissen wir, dass f, g von der Klasse C^1 sind, also $f + \lambda g$ auch. Damit ist nur zu zeigen, dass $(f + \lambda g)^{-1}$ für alle $|\lambda| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ geeignet, differenzierbar ist mit stetiger Umkehrabbildung. Wir können hierbei direkt mit dem lokalen Umkehrsatz argumentieren. Hierzu beachtet man zuerst, dass die invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ offen sind und $E \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ gilt. Also gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ mit $|E - A| < \varepsilon_2 \Rightarrow A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2/(2L)\}$. Dann ist für alle $|\lambda| < \varepsilon$ die Abbildung $\mathrm{Id} + \lambda g$ global invertierbar, und wegen

$$|E + \lambda Dg - E| = |\lambda|L < \varepsilon_2$$

ist $D(f + \lambda g)(x)$ für jedes x invertierbar. Also ist $f + \lambda g$ nach dem lokalen Umkehrsatz in einer Umgebung eines jeden x ein lokaler C^1-Diffeomorphismus. Da wir die Umkehrabbildung allerdings schon kennen, muss diese auch stetig differenzierbar sein, da letzteres eine lokale Eigenschaft ist.