Einführung in die Komplexe Analysis, Übungsblatt Nr. 13

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Pavel Zorin-Kranich
Sommersemester 2016

Abgabe in der Vorlesung am 18.07.2016.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Dirichletreihen)**.** (a) Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen sodass die Partialsummenfolge $A_N = a_1 + \dots + a_N$ beschränkt ist. Zeigen Sie dass die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ konvergiert und eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\{\operatorname{Re} > 0\}$ definiert. Hinweis: benutzen Sie partielle Summation.

(b) Sei $\tilde{\zeta}(s)$ die Dirichletreihe aus Teil (a) mit $a_n = (-1)^{n+1}$. Zeigen Sie dass $\tilde{\zeta}$ auf dem Intervall $(0,1) \subset \mathbb{R}$ keine Nullstellen hat.

(c) Zeigen Sie $\tilde{\zeta}(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ für $s > 1$ und folgern Sie daraus dass ζ ebenfalls keine Nullstellen auf dem Intervall $(0,1)$ hat.

Definition. Die *Ordnung* einer Funktion f auf $\mathbb{C}$ ist die Größe

$$\operatorname{ord} f = \operatorname{ord}_z f(z) := \inf\{\rho > 0 : \limsup_{|z|\to\infty} |f(z)| e^{-|z|^\rho} = 0\}.$$

Aufgabe 2. Der Faktorisierungssatz von Hadamard besagt dass jede ganze Funktion f der Ordung $\rho < \infty$ in der Form

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_n E_k(z/a_n), \quad E_k(z) = (1-z)e^{z+z^2/2+\dots+z^k/k}$$

geschrieben werden kann, wobei $k = \lfloor \rho \rfloor$, P ein Polynom vom Grad $\leq k$, und (a_n) die mit Vielfachheit aufgelisteten Nullstellen von f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind.
Zeigen Sie mithilfe dieses Satzes dass jede ganze Funktion deren Ordnung eine Zahl in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist unendlich viele Nullstellen haben muss.

Aufgabe 3 (ζ hat unendlich viele nichttriviale Nullstellen)**.** (a) Zeigen Sie $\operatorname{ord} \xi = 1$, wobei ξ die Riemannsche ξ-Funktion ist.

(b) Sei $F(s) := (s + 1/2)(s - 1/2)\xi(s + 1/2)$. Zeigen Sie dass eine ganze Funktion G der Ordnung $1/2$ mit $F(s) = G(s^2)$ existiert.

(c) Zeigen Sie dass ζ unendlich viele Nullstellen im Streifen $\{0 < \operatorname{Re} < 1\}$ besitzt.

Aufgabe 4 (Integrallogarithmus)**.** Der *Integrallogarithmus* ist die Funktion

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Zeigen Sie dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{Li}(x) = \sum_{n=1}^{N} (n-1)! \frac{x}{(\log x)^n} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\Big)$$

Hinweis: benutzen Sie paritelle Integration.
Anmerkung: der Integrallogarithmus approximiert die Primzahlzählfunktion deutlich besser als $x/\log x$, es gilt nämlich $|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| = O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$. Diese Form des Primzahlensatzes wurde von de la Vallée Poussin 1899 bewiesen.