Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr. 5 — Abgabe vor der Vorlesung am 27.05.2016

Aufgabe 1

Es sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ in Ω und $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$. Zeigen Sie dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$$

Aufgabe 2

Es sei $u \in C^2(\overline{B}_1)$ harmonisch und nicht konstant und nehme sein Maximum in $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \partial B_1$ an. Zeigen Sie, dass dann

$$\partial_{x_1} u(e_1) > 0.$$

Hinweise:

- Die schwächere Aussage $\partial_{x_1} u(e_1) \geq 0$ folgt relativ direkt aus dem Maximumsprinzip.
- Betrachten Sie eine Funktion der Form $w(x) = u(x) + \epsilon e^{-\lambda|x|^2} + C_{\lambda,\epsilon}$ auf einem Kreisring.

Aufgabe 3

Es sei $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ konvex und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, dann besagt die Jensen'sche Ungleichung, dass für alle reellwertigen Funktionen $u \in C(\overline{\Omega})$

$$\phi\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi(u) dx.$$

Nutzen Sie diese Aussage um zu zeigen, dass für jede harmonische Funktion v, die Funktion $w = \phi(v)$ subharmonisch ist.

Aufgabe 4

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und die Funktionen $U : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ und $V : \mathbb{R} \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$U(r,\theta) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$
$$V(t,\theta) = U(e^t,\theta).$$

Zeigen Sie, dass

$$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial_\theta^2} = e^{-2t}(\partial_t^2 + \partial_\theta^2)V.$$

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.