Mathematisches Institut
Prof. Dr. Herbert Koch
Dr. Christian Zillinger
Sommersemester 2016

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Übungsblatt Nr.1 — Abgabe vor der Vorlesung am 22.04.2016

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $\frac{d}{dt}x(t) = 3|x(t)|^{2/3}$, $x(0) = 0$,

b) $\frac{d}{dt}x(t) = tx^2(t)$ für $t \in (0,2)$ und $x(0) = -\frac{1}{2}$,

c) $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{e^{-x(t)^2}}{x(t)(2t+t^2)}$, $x(2) = 0$,

d) $\frac{d}{dt}x(t) = \frac{x(t)\log(x(t))}{\sin(t)}$, $x(\frac{\pi}{2}) = e^e$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{2t+t^2}$ und nutzen Sie, dass $\frac{1}{\sin(t)} = \frac{sin(t)}{1-\cos^2(t)}$.

Aufgabe 2

a) Betrachten Sie das lineare System

$$\frac{d}{dt}v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

sowie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2}{dt^2}x + a\frac{d}{dt}x + bx + c = 0, \tag{2}$$

für gegebene Koeffizientenfunktionen a, b, c. Zeigen Sie, dass v eine Lösung von (1) ist, genau dann wenn die erste Komponente v_1 eine Lösung von (2) ist und $v_2 = \frac{d}{dt}v_1$.

b) Betrachten Sie die Gleichung

$$\alpha\frac{d^2}{dt^2}x + 2\beta\frac{d}{dt}x + \gamma x = 0. \tag{3}$$

Hierbei seien $\alpha > 0$ und $\beta, \gamma \geq 0$ gegebene Konstanten.

- Betrachten Sie den Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist dies eine Lösung von (3)? Bestimmen Sie die Lösungen von (3) mit $x(0) = 1$, $\frac{d}{dt}x(0) = 0$.
- Betrachten Sie nun die vier Fälle $\alpha = 1$, $\gamma = 4$, $\beta = 0, 1, 2, 3$ und skizzieren Sie das Verhalten der Funktion $x(t)$ und des Vektors $(x(t), \frac{d}{dt}x(t))$.

Aufgabe 3

a) Finden Sie die Lösung der zweiten Ordnungsgleichung

$$x\frac{d^2}{dt^2}x = \left(\frac{d}{dt}x\right)^2. \tag{4}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{d^2}{dt^2}x = (1+3x^2)\frac{d}{dt}x \tag{5}$$

mit $x(0) = 1$, $\frac{d}{dt}x(0) = 2$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass x außerdem die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x = x + x^3,$$

erfüllt.

Aufgabe 4

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Funktion

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!} x_0. \tag{6}$$

wohldefiniert und die eindeutige Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}u = Au \tag{7}$$

mit Anfangsdaten $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist. Im Folgenden betrachten wir einige Spezialfälle.

a) Berechnen Sie die Matrix

$$exp(tA) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k A^k}{k!}$$

für $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie $exp(tA)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Im zweiten Fall, wenden Sie A auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

Stellen Sie Ihre Überlegungen vollständig und nachvollziehbar dar.