

# Analysis 2, Übungsblatt Nr. 8

Mathematisches Institut  
Prof. Dr. Christoph Thiele  
Dr. Diogo Oliveira e Silva  
Sommersemester 2015



---

## Abgabe in der Vorlesung am 22.06.2015.

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

---

**Aufgabe 1** (Umkehrfunktionen). Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die durch

$$F(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Jakobi-Matrix von  $F$  und, wo sie existiert, ihre Inverse.

(b) Bestimmen Sie die Menge

$$\mathcal{M} := F(\{x \in \mathbb{R}^2 : \det(DF(x)) \neq 0\}).$$

(c) Zeigen Sie, dass  $F$  surjektiv ist und dass jeder Punkt  $(u, v) \in \mathcal{M}$  genau zwei Urbildpunkte besitzt.

**Aufgabe 2** (Implizite Funktionen). Diskutieren Sie die Höhenlinien der Funktion  $F : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x, y) = xye^{-x}e^{-y}$$

und untersuchen Sie insbesondere in welchen Rechtecken  $I \times J \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$  sich die Mengen

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J : y = \phi(x)\} \text{ bzw. } \{(x, y) \in I \times J : x = \psi(y)\}$$

mit differenzierbaren Funktionen  $\phi : I \rightarrow J$  bzw.  $\psi : J \rightarrow I$  darstellen lassen.

**Aufgabe 3** (Parameterabhängige Integrale I). Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt$$

durch Differenzieren des Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} dt.$$

**Aufgabe 4** (Parameterabhängige Integrale II). Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für jedes  $y \in \mathbb{R}$  seien

$$f(y) := \int_0^1 g(x, y) dx \text{ und } f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x, y) dx.$$

Zeigen Sie:

- Die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind wohldefiniert.
- Die Funktion  $f$  ist differenzierbar.
- $f'(0) \neq f^*(0)$ .
- Warum gibt es keinen Widerspruch zum Satz 2.32 im Skript?