

Analysis 2, Übungsblatt Nr. 6

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015



Abgabe in der Vorlesung am 01.06.2015.

Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Taylor-Formel). Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y},$$

im Punkt $(1, 1)$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung. Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler im $B_{\frac{1}{2}}((1, 1))$.

Aufgabe 2 (Kettenregel). (a) Zeigen Sie: Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es ein $c < \infty$, so dass $\|Tv\| \leq c\|v\|$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Beweisen Sie: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : U \rightarrow V$ sowie $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Abbildungen. Die Abbildung g sei in $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung f im Punkt $y = g(x) \in V$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ im Punkt x differenzierbar und es gilt

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Aufgabe 3 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Sei $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ der Laplace-Operator auf \mathbb{R}^n .

Sei $p : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung definiert durch

$$p(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Zeigen Sie: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, so gilt auf der Menge $p^{-1}(U)$ die Gleichung

$$(\Delta f) \circ p = \frac{\partial^2(f \circ p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ p)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(f \circ p)}{\partial \theta^2}.$$

Aufgabe 4 (Lokale Extrema). Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - 4y^2}.$$

Begründen Sie Ihre Behauptungen!