

EINFÜHRUNG IN DIE KOMPLEXE ANALYSIS

WERNER MÜLLER

Sommersemester 2015

INHALTSVERZEICHNIS

0. Die komplexen Zahlen	3
1. Holomorphe Funktionen	6
2. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	9
3. Potenzreihen	19
4. Elementare Funktionen	22
5. Integration	27
6. Stammfunktionen	30
7. Der Cauchyche Integralsatz	33
8. Die Cauchysche Integralformel	40
9. Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen	44
10. Cauchysche Ungleichung und Maximumprinzip	60
11. Konvergenzsätze	68
12. Laurentreihen	72
13. Isolierte Singularitäten	76
14. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz	79
15. Der Residuensatz	86

Danksagung

Dieses Skript ist durch die tatkräftige Unterstützung von Frau Silke Engels und Frau Monika Barthelme zustande gekommen, die große Teile geschrieben haben. Insbesondere hat Frau Barthelme die schönen Illustrationen erstellt. Herr Dr. Clemens Kienzler hat durch viele Hinweise wesentlich zur Verbesserung des Skriptes beigetragen. Ihnen allen gilt mein herzlicher Dank.

Hinweis

Das Skript wurde zwar Korrektur gelesen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass es noch Fehler enthält. Tippfehler und Korrekturen bitte an mueller@math.uni-bonn.de schicken.

0. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Die Grundlage der komplexen Analysis bildet der Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Ich erinnere kurz an die Definition der komplexen Zahlen und einige ihrer Eigenschaften. Eine ausführliche Darstellung findet man z.B. in dem Buch "Analysis I" von Königsberger.

Definition und Eigenschaften

Wir führen in \mathbb{R}^2 eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

- (1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- (2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Dann prüft man leicht nach, dass für \mathbb{R}^2 mit der Addition (1) und der Multiplikation (2) die Körperaxiome erfüllt sind. Wir erhalten also einen Körper $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, den wir mit \mathbb{C} bezeichnen. Null- und Einselement in \mathbb{C} sind gegeben durch

$$0 = (0, 0), \quad 1 = (1, 0).$$

Wenn $z = (x, y) \neq 0$, dann existiert z^{-1} und ist gegeben durch

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Es sei $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $j(x) = (x, 0)$. Dann ist j ein Homomorphismus von Körpern und $j(\mathbb{R})$ ist ein Teilkörper von \mathbb{C} . Wir identifizieren \mathbb{R} mit $j(\mathbb{R})$ und sehen \mathbb{R} als Teilkörper von \mathbb{C} an. Sei

$$i := (0, 1).$$

Dann gilt $i^2 = (-1, 0) = -1$. Wir nennen i die *imaginäre Einheit*. Mit diesen Bezeichnungen können wir eine komplexe Zahl $z = (x, y)$ schreiben als

$$z = x + iy.$$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

$\operatorname{Re}(z)$ heißt *Realteil* und $\operatorname{Im}(z)$ *Imaginärteil* von z .

Die *komplexe Konjugation*

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$$

ist die Spiegelung an der reellen Achse. Für $z = x + iy$ ist $\bar{z} = x - iy$. Es gelten folgende Rechenregeln:

- 1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- 2) $\overline{\bar{z}} = z$.
- 3) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- 4) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
- 5) Für $z = x + iy$ ist $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Der Absolutbetrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert als

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften.

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

- 1) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- 2) $|\bar{z}| = |z|$,
- 3) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$,
- 4) $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Polarkoordinaten

In \mathbb{R}^2 führen wir Polarkoordinaten (r, φ) ein. Dabei ist $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Für $z = x + iy \neq 0$ gibt es genau ein $r > 0$ und einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Es ist $r = |z|$ und

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}.$$

Den Winkel φ nennt man das *Argument* von z und schreibt dafür $\arg(z)$.

Topologie von \mathbb{C}

In diesem Abschnitt erinnere ich an einige Fakten, die die Topologie von \mathbb{C} betreffen. Eine ausführliche Darstellung zur Topologie des \mathbb{R}^n findet man in dem Buch "Analysis II" von Königsberger.

Sei z_0 und $r > 0$. Es sei

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe vom Radius r mit Zentrum z_0 . Entsprechend ist die abgeschlossene Kreisscheibe gegeben durch

$$\overline{D_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Mit $\partial D_r(z_0)$ bezeichnen wir den Rand der Kreisscheibe $D_r(z_0)$. Es gilt

$$\partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

- Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, wenn für alle $z_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert, so dass $D_r(z_0) \subset U$.
- $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $A^c := \mathbb{C} \setminus A$ offen ist.
- $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung von K durch offene Teilmengen von \mathbb{C} eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Für kompakte Mengen gibt es folgende äquivalente Charakterisierungen.

Satz 0.1. *Es sei $K \subset \mathbb{C}$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

- 1) K ist kompakt.
- 2) K ist abgeschlossen und beschränkt.

- 3) Jede Folge (z_j) in K hat einen Häufungspunkt in K .
- 4) Jede Folge (z_j) in K hat eine konvergente Teilfolge mit $\lim_{j \rightarrow \infty} z_{i_j} \in K$.

1. HOLOMORPHE FUNKTIONEN

Definition 1.1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine Funktion. f heißt in $z_0 \in U$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung von f in z_0* und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

Wir erinnern uns daran, dass die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

folgendes bedeutet: Es existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in U \setminus \{z_0\} : |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a \right| < \epsilon.$$

Falls ein solches a existiert, ist $a = f'(z_0)$.

Äquivalente Formulierung

Lemma 1.2. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge U ist genau dann in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, wenn eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit

- 1) φ ist in z_0 stetig;
- 2) $\forall z \in U : f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z)$.

Beweis: \Rightarrow) Es sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \varphi(z_0).$$

Daher ist φ in z_0 stetig und nach Definition von φ ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z).$$

\Leftarrow) Wenn eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z), \quad z \in U,$$

existiert, so ist für $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z).$$

Da $\varphi(z)$ in z_0 stetig ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0).$$

□

Folgerung 1.3. Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist, so ist f in z_0 stetig.

Beweis: Da f in z_0 komplex differenzierbar ist existiert nach Lemma 1.2 eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z), \quad z \in U,$$

gilt. Daraus folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Definition 1.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

- 1) Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ **holomorph**, wenn eine Umgebung $U_0 \subset U$ von z_0 existiert so, dass f für alle $z \in U_0$ komplex differenzierbar ist.
- 2) f heißt **holomorph** auf U , wenn f für alle $z \in U$ komplex differenzierbar in z ist.

Beispiele: 1) $f(z) = z$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist für $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Daher ist f in z_0 komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2) $f(z) = \bar{z}$. Seien $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $z \neq z_0$, und $z - z_0 = re^{i\theta}$. Dann ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}.$$

Daraus folgt, daß $\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$ keinen Grenzwert für $z \rightarrow z_0$ haben kann.

Wir haben damit ein einfaches Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gefunden, die nirgends komplex differenzierbar ist.

Einfache Eigenschaften

Satz 1.5. Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann gilt:

1) $f + g$ ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

2) fg ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3) Sei $g(z_0) \neq 0$. Dann ist f/g in z_0 komplex differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Beweis: Analog zum reellen Fall. Übung!

Satz 1.6. (Kettenregel) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ seien Funktionen. Es sei f in z_0 und g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Beweis: Sei $w_0 = f(z_0)$. Aus Lemma 1.2 folgt, daß eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine in w_0 stetige Funktion $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ existieren so, daß

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z), & z \in U, \\ g(w) &= g(w_0) + (w - w_0)\psi(w), & w \in V. \end{aligned}$$

Weiter ist $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ und $\psi(w_0) = g'(w_0)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (1.1) \quad (g \circ f)(z) &= g(f(z)) = g(f(z_0)) + (f(z) - f(z_0))\psi(f(z)) \\ &= g(f(z_0)) + (z - z_0)\varphi(z)\psi(f(z)). \end{aligned}$$

Nach Folgerung 1.3 ist f stetig in z_0 . Daher ist $\psi(f(z))$ in z_0 stetig. Hieraus folgt, daß die Funktion $z \mapsto \varphi(z)\psi(f(z))$ in z_0 stetig ist. Aus (1.1) und Lemma 1.2 folgt damit, daß $(g \circ f)(z)$ in z_0 komplex differenzierbar ist und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = \varphi(z_0)\psi(f(z_0)) = f'(z_0)g'(f(z_0)).$$

□

Definition 1.7. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Die Abbildung $f : U \rightarrow V$ heißt **biholomorph**, wenn gilt:

1) f ist bijektiv.

2) f und f^{-1} sind holomorph.

Satz 1.8. $f : U \rightarrow V$ ist genau dann biholomorph, wenn gilt:

- 1) f ist holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.
- 2) f ist bijektiv.
- 3) f^{-1} ist stetig. Wenn $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist, so ist

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in U.$$

Beweis: Übung!

Satz 1.9. 1) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ist eine holomorphe Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

2) Es seien $p(z), q(z)$ Polynome, $q(z) \not\equiv 0$, und $U = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$.

Dann ist $p(z)/q(z)$ holomorph auf U .

2. DIE CAUCHY-RIEMANNSCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Wir identifizieren \mathbb{C} mit der reellen Ebene \mathbb{R}^2 mittels der Abbildung $z = x + iy \mapsto (x, y)$ und betrachten f als Funktion von (x, y) . Wir erinnern uns daran, daß $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in U$ reell differenzierbar ist genau dann, wenn eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert so, daß gilt:

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - T(h)}{|h|} = 0.$$

Dann ist $T = df(z)$ das Differential von f in z . Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in U$ komplex differenzierbar ist, so existiert $f'(z)$ und es gilt

$$(2.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h}{h} = 0.$$

Es sei $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$T(h) = f'(z) \cdot h, \quad h \in \mathbb{C}.$$

Aus (2.2) folgt, daß mit diesem T (2.1) gilt, d.h., $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist reell differenzierbar und für $df(z)$ gilt

$$df(z)(h) = f'(z) \cdot h.$$

Es seien $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy), \quad (x, y) \in U.$$

Dann ist

$$(2.3) \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Wenn f in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar ist, so haben wir eben gesehen, dass f in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist. Da die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung von \mathbb{C} ist, folgt aus der Kettenregel, dass \bar{f} in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist. Daraus folgt, dass

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{und} \quad v = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

in (x_0, y_0) reell differenzierbar sind. Insbesondere existieren in (x_0, y_0) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y.$$

Es sei $h \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Dies sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**. Es gilt also

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

Satz 2.1. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $z \in U$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- 1) f ist in $z \in U$ komplex differenzierbar.
- 2) f ist in z reell differenzierbar und das Differential $df(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -linear.

3) f ist in z reell differenzierbar, und für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelten die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z).$$

Beweis: 1) \Leftrightarrow 2)

Oben haben wir bereits 1) \Rightarrow 2) gezeigt. Es sei umgekehrt f reell differenzierbar in z und $df(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei \mathbb{C} -linear. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit

$$df(z)(h) = c \cdot h, \quad h \in \mathbb{C}.$$

Dann folgt aber

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z) - c \cdot h}{h} = 0.$$

und daher ist f in z komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$.

2) \Leftrightarrow 3)

Das Differential $df(z)$ ist gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix}$$

Es sei $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $T(h) = c \cdot h$. Es sei $c = a + ib$, $h = h_1 + ih_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c \cdot h = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1).$$

Als Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat T die Matrixdarstellung

$$(2.5) \quad T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Wenn T umgekehrt eine Matrixdarstellung der Form (2.5) hat, so ist $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex linear. Zusammen mit (2.4) folgt daraus, daß $df(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex-linear ist genau dann, wenn

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

gilt. □

Ich erinnere an folgendes Kriterium für die reelle Differenzierbarkeit. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig partiell differenzierbar in $(x_0, y_0) \in U$, wenn die partiellen Ableitungen f_x und f_y in einer Umgebung von (x_0, y_0) existieren und in diesem Punkt stetig sind. Es sei $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung. Wenn die Funktionen $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $z \in U$ stetig partiell differenzierbar sind, so ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $z \in U$ reell differenzierbar. Zusammen mit Satz 2.1 erhalten wir daraus das folgende Korollar.

Korollar 2.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $f = u + iv$, $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte:*

- 1) u, v sind in $z \in U$ stetig partiell differenzierbar.
- 2) $u_x(z) = v_y(z)$, $u_y(z) = -v_x(z)$.

Dann ist f in z komplex differenzierbar.

Wir führen jetzt den wichtigen Begriff des Gebietes ein. Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt bekanntlich zusammenhängend, wenn folgendes gilt: Für alle offenen Teilmengen $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ mit $U = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ist entweder $U = V_1$ oder $U = V_2$.

Definition 2.3. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**.

Korollar 2.4. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant.

Beweis: Es sei $z = x + iy$, $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Bei der Herleitung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen haben wir gezeigt, daß

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -iu_y(z) + v_y(z)$$

gilt. Wenn $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$ ist, so folgt daraus $u_x(z) = u_y(z) = 0$ und $v_x(z) = v_y(z) = 0$ für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend ist, folgt daraus mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß u und v konstant sind. □

Beispiele: 1) Die Exponentialfunktion e^z ist definiert durch

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Es sei $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Daher ist

$$u := \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y, \quad v := \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Aus Korollar 2.2 folgt daher, dass e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^z.$$

2) Es sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ und

$$\log(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = x + iy \in U.$$

Für $z = x \in \mathbb{R}^+$ stimmt $\log(z)$ mit der Logarithmusfunktion $\log(x)$ überein. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\log(z)$.

Es sei

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Damit gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und aus Korollar 2.2 folgt, dass $\log(z)$ für alle $z \in U$ komplex differenzierbar ist und es gilt

$$\begin{aligned}(\log(z))' &= u_x(z) + iv_x(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{1}{x^2} \frac{y}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

In U ist $\log(z)$ der Hauptzweig der komplexen Logarithmusfunktion. Wir werden später zeigen, dass gilt

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z-1)^k \quad \text{für } |z-1| < 1.$$

3) Ist $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ in der offenen Menge U holomorph, so gilt in U :

$$|f'(z)|^2 = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2.$$

Dies folgt aus

$$|f'(z)|^2 = f'(z) \overline{f'(z)} = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = u_x^2 + v_x^2$$

und $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. $|f'(z)|^2$ ist also der Wert der Determinante der Jacobimatrix der Abbildung $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Insbesondere folgt daraus

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle } z = x + iy \in U.$$

Falls $f'(z) \neq 0$, so ist die Determinante positiv.

Harmonische Funktionen

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man eine notwendige Bedingung dafür, dass eine reelle Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ der Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist.

Satz 2.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelte $u, v \in C^2(U)$. Dann gilt*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Beweis: Da $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, gilt in U :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daraus erhält man

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Da $u, v \in C^2(U)$ ist, folgt aus dem Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Aus (2.6) folgt damit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

□

Bemerkungen:

1) Die zusätzliche Annahme in Satz 2.5, dass u, v zweimal stetig differenzierbar sind, ist in Wahrheit überflüssig, da wir später zeigen werden, dass eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft komplex differenzierbar ist.

2) Der partielle Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

heißt Laplace-Operator. Mit Bemerkung 1) folgt aus Satz 2.5, dass für eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ der Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und der Imaginärteil $v = \operatorname{Im} f$ der Gleichung

$$\Delta h = 0$$

genügen. Solche Funktionen h nennt man **harmonische Funktionen**. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zeigt man, dass jede Lösung der Gleichung $\Delta h = 0$ unendlich oft differenzierbar ist.

Es gilt auch die Umkehrung.

Satz 2.6. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $U := I + iJ$. Sei $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal stetig partiell differenzierbar und harmonisch. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $u = \operatorname{Re}(f)$.*

Beweis. Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Aus (2.7) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass für alle $x \in I$ gilt

$$(2.8) \quad v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt + h(x),$$

wobei $h \in C^1(I)$. Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt + h'(x).$$

Nun verwenden wir, dass u harmonisch ist. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt + h'(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + h'(x). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung in (2.7) folgt damit

$$h'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0)$$

Aus (2.8) erhalten wir

$$(2.9) \quad v(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) dt + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Sei jetzt $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal stetig partiell differenzierbar und harmonisch. Wir definieren v durch (2.9), wobei wir $C = 0$ wählen, d.h. wir definieren

$$(2.10) \quad v(x, y) := \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) dt.$$

Dann ist v stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0).$$

Wir benutzen nun, dass u harmonisch ist, d.h. es gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Wir erhalten damit

$$(2.11) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0).$$

Aus Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung folgt

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0).$$

Wenn wir dies in (2.11) einsetzen, folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in U$. Damit können wir (2.10) auch schreiben als

$$(2.12) \quad \begin{aligned} v(x, y) &:= \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt + \int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial x}(t, y_0) dt \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt + v(x, y_0) - v(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Die Ableitung nach y ergibt

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in U$. Damit gelten für u, v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$. Aus Korollar 2.2 folgt, dass f holomorph ist. □

Die Wirtinger-Ableitungen

In diesem Abschnitt führen wir die partiellen Ableitungen nach z und \bar{z} ein. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $z \in U$ reell differenzierbar. Dann existiert das Differential $df(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Das Differential kann man durch die partiellen Ableitungen wie folgt ausdrücken:

$$df(z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 df(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 df(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Bezüglich der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow i.$$

Daher ist für $df(z)$, aufgefasst als \mathbb{R} -lineare Abbildung von \mathbb{C} :

$$df(z)(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad df(z)(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 df(z)(h_1 + ih_2) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z) \\
 (2.13) \qquad &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) (h_1 + ih_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) (h_1 - ih_2).
 \end{aligned}$$

Für die Linearkombinationen der reellen Differentiale auf der rechten Seite führen wir eine neue Bezeichnung ein.

Definition 2.7. Die Wirtinger-Ableitungen sind definiert durch

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).}$$

Dies bedeutet folgendes: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Aus (2.13) erhalten wir

$$\boxed{df(z)(h) = h \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \bar{h} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z), \quad h \in \mathbb{C}.}$$

Satz 2.8. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) f ist reell differenzierbar in z_0 ;
- 2) Es existieren Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$, die stetig in z_0 sind, so dass für alle $z \in U$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)\varphi_2(z).$$

Dann ist $\varphi_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ und $\varphi_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$.

Beweis: \Rightarrow) In Analysis II wurde gezeigt, dass f genau dann in $z \in U$ reell differenzierbar ist, wenn eine Abbildung

$$\phi : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

existiert mit

- a) ϕ ist stetig in z_0 ;
- b) $f(z) = f(z_0) + \phi(z)(z - z_0)$.

Sei $\phi_1(z) := \phi(z)(1)$ und $\phi_2(z) := \phi(z)(i)$. Dann ist

$$(2.14) \qquad f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\phi_1(z) + (y - y_0)\phi_2(z),$$

wobei $z = x + iy$ und $z_0 = x_0 + iy_0$ ist. Wir setzen

$$\varphi_1(z) := \frac{1}{2}(\phi_1(z) - i\phi_2(z)), \quad \varphi_2(z) := \frac{1}{2}(\phi_1(z) + i\phi_2(z)).$$

Dann folgt aus (2.14):

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi_1(z) + (\bar{z} - \bar{z}_0)\varphi_2(z).$$

Da ϕ in z_0 stetig ist, sind φ_1 und φ_2 in z_0 stetig. Weiter ist

$$\varphi_1(z_0) = \frac{1}{2}(\phi_1(z_0) - i\phi_2(z_0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Ebenso ergibt sich

$$\varphi_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

⇐) Übung!

□

Satz 2.9. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1) f ist in z_0 komplex differenzierbar.
- 2) f ist in z_0 reell differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Beweis: Sei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Dann ist $f = u + iv$. Aus Satz 2.1 folgt: f ist in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

gelten. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

□

Rechenregeln für die Wirtingerableitungen

Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar.

- 1) $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sind \mathbb{C} -linear und es gilt die Leibnizregel.
- 2) $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}.$
- 3) Wenn f reell ist, so ist $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}.$
- 4) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1.$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta f. \\
 6) \quad & \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.
 \end{aligned}$$

Beim Differenzieren können wir daher z und \bar{z} so behandeln, als ob z und \bar{z} unabhängige Variablen wären.

3. POTENZREIHEN

Wir beginnen mit der Wiederholung eines Resultates aus Analysis I. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist die Supremumsnorm von f definiert als

$$\|f\|_I = \begin{cases} \sup\{|f(x)|: x \in I\}, & f \text{ beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $f_k: I \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f , wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N: \|f_k - f\| < \varepsilon.$$

Es gilt nun folgender Satz.

Satz 3.1. *Es sei $f_k: I \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Es gelte:*

- 1) $\forall x \in I: f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x)$.
- 2) $(f'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{C}$.

Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt $f' = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$.

Für einen Beweis siehe Königsberger, Analysis I.

Wir betrachten jetzt die entsprechende Frage für holomorphe Funktionen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Die Supremumsnorm von f ist definiert als

$$\|f\|_U = \begin{cases} \sup\{|f(z)|: z \in U\}, & f \text{ beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 3.2. *Es sei $f_k: U \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion.*

- 1) Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N: \|f_k - f\| < \varepsilon.$$

- 2) Die Folge (f_k) konvergiert auf U *lokal gleichmäßig* gegen f , wenn für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung $V(z_0) \subset U$ von z_0 existiert, sodass (f_k) auf $V(z_0)$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 3.3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f_k: U \rightarrow \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktion und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Es gelte:

- 1) $\forall z \in U: f_k(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(z)$.
- 2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist f'_k stetig.
- 3) (f'_k) konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph und $f' = g = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$.

Beweis. Da f_k holomorph ist, gilt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f_k}{\partial y}(z) \right) = \frac{\partial f_k}{\partial z}(z) = f'_k(z)$$

und

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f_k}{\partial y}(z) \right) = 0.$$

Aus den Voraussetzungen 2) und 3) folgt durch Kombination dieser Gleichungen, dass $\frac{\partial f_k}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ stetig sind und die Folgen

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \right)_{k \in \mathbb{N}}, \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

lokal gleichmäßig konvergieren. Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Sei $V(z_0) \subset U$ eine Umgebung von z_0 , auf der diese Folgen gleichmäßig konvergieren. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] + i[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset V(z_0).$$

Dann konvergiert die Folge $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y_0) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ gegen eine Funktion $h(x)$. Aus Satz 3.1 folgt, dass $f(x, y_0)$ in x differenzierbar ist und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0).$$

Ebenso folgt, dass $f(x_0, y)$ in y differenzierbar ist und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y).$$

Daraus erhalten wir, dass f in z_0 stetig partiell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}}(z_0)$$

gilt. Da f_k holomorph ist, ist $\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ nach Satz 2.8. Damit ist

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Aus Satz 2.9 folgt, dass f in z_0 komplex differenzierbar ist. Weiter ist

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f_k}{\partial z}(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(z_0) = g(z_0).$$

□

Entsprechendes gilt für Reihen. Seien $f_k: U \rightarrow \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, Funktionen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig, wenn alle f_k beschränkt sind und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_U < \infty.$$

Satz 3.4. Sei $f_k: U \rightarrow \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen. Es gelte:

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ konvergiert für alle $z \in U$.
- 2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist f'_k stetig.
- 3) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ konvergiert lokal gleichmäßig.

Dann ist $f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ holomorph und

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z).$$

Beweis. Der Beweis folgt aus Satz 3.3, angewendet auf die Folge der Partialsummen

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z).$$

□

Wir betrachten jetzt Potenzreihen

Satz 3.5. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f(z)$ in $D_R(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

für alle $z \in D_R(z_0)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es genügt, den Fall $k = 1$ zu betrachten. Es sei

$$q = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist $R = 1/q$. Es sei

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Sei R_1 der Konvergenzradius von g . Nach dem Wurzelkriterium ist $R_1 = 1/q_1$, wobei

$$q_1 = \limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|}$$

ist. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist, ist

$$q_1 = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Daher ist $R_1 = R$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $z_0 = 0$. Es sei $0 < r < R$. Da eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzkreises absolut konvergiert, ist

$$(3.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \infty.$$

Sei $f_n(z) := a_n z^n, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1) Für alle $z \in D_R(0)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

2) $f'_n(z) = n a_n z^{n-1}$ ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Es sei $0 < r < R$. Dann ist

$$\|f'_n\|_{D_r(0)} = n|a_n|r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus (3.1) folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\|_{D_r(0)} < \infty.$$

Damit sind für die Folge (f_n) die Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt und die Behauptung des Satzes folgt aus Satz 3.3.

4. ELEMENTARE FUNKTIONEN

Mit Hilfe von Satz 3.5 können wir jetzt nichtrationale holomorphe Funktionen konstruieren.

1) Die Exponentialfunktion.

Die Exponentialfunktion $\exp(z) = e^z$ ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Mittels Quotenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius dieser Reihe ∞ ist. Daher ist nach Satz 3.5 e^z eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion.

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

1. $\forall z, w \in \mathbb{C}: e^z e^w = e^{z+w}$
2. $\forall z \in \mathbb{C}: e^z \neq 0$
3. $(e^z)' = e^z$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}: e^{x+iy} = e^x \left(\cos(y) + i \sin(y) \right)$.
5. Es sei $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist surjektiv.

Beweis. 1) folgt aus dem Cauchyschen Produktsatz für Potenzreihen. Aus 1) folgt $e^z e^{-z} = 1$. Daraus folgt 2). 3) Ergibt sich aus Satz 3.5 durch Differenzieren der Exponentialreihe. 4) folgt aus 1) und der Eulerschen Formel. Zum Beweis von 5) sei $w \in \mathbb{C}^\times$. Dann ist $w = r e^{i\theta}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Aus Analysis I wissen wir, dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein Diffeomorphismus ist. Weiter ist $\log = \exp^{-1}$. Sei $z = \log r + i\theta$. Dann ist $e^z = r e^{i\theta} = w$. \square

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei S_n der Streifen

$$S_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 2n\pi \leq \text{Im}(z) < 2(n+1)\pi\}.$$

Dann induziert \exp eine bijektive Abbildung

$$\exp : S_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times.$$

Es sei $(\mathbb{C}, +)$ die additive Gruppe und $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ die multiplikative Gruppe.

Lemma 4.1. *\exp ist ein surjektiver Homomorphismus*

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

und es gilt

$$\ker(\exp) = \{2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Sei $e^z = 1$ und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $|e^z| = e^x = 1$. Daraus folgt $x = 0$ und $e^{iy} = 1 = \cos y + i \sin y$. Daher ist $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Somit existiert $k \in \mathbb{Z}$, so dass $y = 2\pi k$ ist. \square

Aus diesem lemma folgt, dass die folgende Sequenz exakt ist.

$$0 \rightarrow 2\pi i \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \rightarrow 1.$$

2) Trigonometrische Funktion.

Die Reihen

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

haben ebenfalls den Konvergenzradius ∞ und definieren daher auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktionen.

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

- 1) $(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z$.
- 2) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
- 3) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.
- 4) $\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z, \cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$.

5) Es ist

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \left\{ \frac{1}{2}\pi + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Beweis: 1) ergibt sich durch Ableitung der entsprechenden Reihen. 2) folgt aus durch Addition der Reihen für $\cos z$ und $\sin z$. 3) folgt aus 2) zusammen mit $\sin(-z) = -\sin(z)$ und $\cos(-z) = \cos(z)$. Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion ergibt sich 4). Zum Beweis von 5) benutzt man, dass

$$2i \sin z = e^{-iz}(e^{2iz} - 1), \quad 2 \cos z = e^{i(\pi-z)}(e^{2i(z-\frac{1}{2}\pi)} - 1).$$

□

Wir definieren schließlich $\tan z$ und $\cot z$ durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi(\mathbb{Z} + 1/2), \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

4) Der Logarithmus

Wie wir oben gezeigt haben ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ surjektiv und $\ker(\exp) = 2\pi\mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C}^\times$ unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ existieren mit $e^w = z$. Der Logarithmus ist also eine mehrdeutige Funktion.

Definition: Sei $z \in \mathbb{C}^\times$. Jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$ heißt **ein Logarithmus** von z .

Die Logarithmen zu einer Zahl z kann man leicht angeben. Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^\times$. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $w_n = \log r + i(\varphi + 2\pi n)$. Dann gilt $e^{w_n} = z$ und

$$\exp^{-1}(z) = \{w_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $(e^z)' = e^z \neq 0$. Daher folgt aus dem Umkehrsatz, dass $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ lokal umkehrbar ist.

Definition 4.2. Es sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Logarithmusfunktion** oder **Zweig des Logarithmus** in G , wenn gilt

$$\exp(\lambda(z)) = z, \quad \forall z \in G.$$

Lemma 4.3. Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- 1) λ ist eine Logarithmusfunktion in G .
- 2) Es gilt $\lambda'(z) = \frac{1}{z}$ in G und es existiert $a \in G$ mit $\exp(\lambda(a)) = a$.

Beweis: 1 \Rightarrow 2)

Aus $\exp(\lambda(z)) = z$ folgt durch differenzieren $1 = \exp(\lambda(z))\lambda'(z) = z\lambda'(z)$. Daraus folgt $\lambda'(z) = \frac{1}{z}$.

2) \Rightarrow 1)

Sei $g(z) = z \exp(-\lambda(z))$, $z \in G$. Dann ist g holomorph in G und

$$g'(z) = \exp(-\lambda(z)) - z \exp(-\lambda(z))\lambda'(z) = 0.$$

Aus Korollar 2.2 folgt, daß ein $c \in \mathbb{C}^\times$ existiert so, dass $g(z) = c$ für alle $z \in G$. Daraus folgt $\exp(\lambda(z)) = cz$. Da $\exp(\lambda(a)) = a$, ist $c=1$.

Existenz von Logarithmusfunktionen

Satz 4.4. *Die Funktion*

$$\log(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z - 1)^k$$

ist eine Logarithmusfunktion in $D_1(1)$.

Beweis: Die Reihe $\lambda(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z - 1)^k$ konvergiert für $|z - 1| < 1$. Aus Satz 3.5 folgt, daß $\lambda(z)$ holomorph in $D_1(1)$ ist und es gilt

$$\lambda'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (z - 1)^{k-1} = \frac{1}{1 + z - 1} = \frac{1}{z}.$$

Da $\log(1) = 0$, ist $e^{\log(1)} = 1$. Aus Lemma 4.3 folgt daher, dass $\log z$ eine Logarithmusfunktion in $D_1(1)$ ist. □

Hauptzweig des Logarithmus

Es sei $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Für $z \in \mathbb{C}^-$ ist $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$. Sei

$$\log(z) := \log |z| + i\varphi.$$

Satz 4.5. $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Logarithmusfunktion und es gilt

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (z - 1)^k \text{ für } z \in D_1(1).$$

Beweis: Übung!

Definition: $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Hauptzweig** des Logarithmus.

5) Potenzen.

Es sei $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die b -te Potenz

$$a^b = \exp(b \log a).$$

Wir können die Potenz auf zwei Weisen als Funktion auffassen. Einmal $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^b$, und zum anderen $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$. Wir benutzen diese Formel, um die allgemeine Potenz für komplexe a und b zu definieren.

Sei $a \in \mathbb{C}^\times$ und $b \in \mathbb{C}$. Weiter sei $\log(a)$ ein Logarithmus von a . Dann setzen wir wie oben

$$a^b = \exp(b \log(a))$$

und nennen dies einen Wert der b -ten Potenz von a .

Beispiel: Sei $b = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ und $a = 1$. Dann ist $\log(1) = 2\pi ik$ ein Logarithmus von 1 und

$$e^{2\pi ik/n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

sind die verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$.

Entsprechend möchten wir jetzt $z \mapsto a^z$ und $z \mapsto z^b$ als holomorphe Funktionen betrachten. Dazu müssen wir wieder Zweige wählen.

Definition 4.6. Es sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet, $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus und $w \in \mathbb{C}$. Die Funktion

$$P_w(z) = \exp(w \log(z)), \quad z \in G,$$

heißt **Zweig** der w -ten Potenz.

Lemma 4.7. Für P gilt:

- 1) $P_w : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.
- 2) $P'_w = w P_{w-1}$
- 3) $\forall w, v \in \mathbb{C} : P_w P_v = P_{w+v}$.
- 4) Für $n \in \mathbb{N} : P_n(z) = z^n, \quad z \in G$.

Beweis: Übung!

Wenn wir für $\log(z)$ den Hauptzweig wählen, so bezeichnen wir $P_w(z)$ auch mit z^w und nennen diese Funktion den Hauptzweig der Potenzfunktion.

Beispiele: 1)

$$j^i = e^{i \log(i)} = e^{i\pi/2i} = e^{-\pi/2}$$

2) Es sei $b = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $z^{1/n}$ die n -Zweige

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right), e^{2\pi i/n} \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right), \dots, e^{2\pi i \frac{n-1}{n}} \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right).$$

5. INTEGRATION

Ein wichtigstes Hilfsmittel der komplexen Analysis ist die Integration komplexwertiger Funktionen über geeignete Kurven. Die Kurven, über die integriert werden kann, sind *Integrationswege*, die wie folgt definiert sind.

Definition 5.1. 1) Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn eine Zerlegung

$$(5.2) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

existiert, so dass $f \upharpoonright_{(t_{k-1}, t_k)}$ stetig ist und stetig in t_{k-1}, t_k fortgesetzt werden kann.

2) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn eine Zerlegung (5.2) existiert, so dass $f \upharpoonright_{(t_{k-1}, t_k)}$ differenzierbar ist und f' zu einer stückweise stetigen Funktion fortgesetzt werden kann.

Definition 5.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ heißt *Integrationsweg*, wenn γ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Wir nennen $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt*, $\gamma(b)$ den *Endpunkt* und $\text{Sp}(\gamma) := \gamma([a, b])$ die *Spur* von γ .

Satz 5.3. *Integrationswege sind rektifizierbar. Die Länge $L(\gamma)$ von γ ist gegeben durch*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Siehe: Königsberger, Analysis II

Definition 5.4. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit $\text{Sp}(\gamma) \subset U$. Dann wird das Integral von f über γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Bei dieser Definition entsteht die Frage wie man zu dieser Definition kommt.

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir **Differentialformen vom Grad 1 (oder kurz 1-Formen)** im \mathbb{R}^n . Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine 1-Form ist eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Die 1-Form ω heißt stetig bzw. differenzierbar, wenn die Abbildung stetig bzw. differenzierbar ist. Die 1-Form dx_i ist definiert durch

$$dx_i(e_1, \dots, e_n) = e_i.$$

Für eine beliebige 1-Form ω gilt dann

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i,$$

wobei die f_i Funktionen sind. Sei $Z: a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei

$$\delta(Z) = \min \left\{ |t_k - t_{k-1}| : k = 1, \dots, n \right\}.$$

Seien $\xi = \{t'_k : t'_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \dots, n\}$ Stützstellen. Sei

$$I(Z, \xi, \omega) := \sum_{k=1}^r \omega(\gamma(t'_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})).$$

Definition 5.5. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg und ω eine 1-Form. ω heißt längs γ integrierbar, wenn ein $I \in \mathbb{C}$ existiert mit: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\delta(Z) < \delta$ und jede Wahl ξ von Stützstellen bezüglich Z gilt

$$|I(Z, \xi, \omega) - I| < \varepsilon.$$

Wenn ω längs γ integrierbar ist, sei

$$\int_{\gamma} \omega := I.$$

Satz 5.6. Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ eine stetige 1-Form und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n): [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg. Dann existiert $\int_{\gamma} \omega$ und es gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Beweis. Königsberger, Analysis II, S. 180.

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 2$ und identifizieren \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} . Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren die 1-Form ω durch

$$\omega := f dz = f dx + i f dy.$$

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Dann ist

$$\langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + i f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \omega.$$

Dies erklärt die Definition des Kurvenintegrals.

Eigenschaften von Kurvenintegralen

a) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ Integrationsweg, dann ist die Abbildung

$$\int_{\gamma} : C^0(\text{Sp}(\gamma)) \rightarrow \mathbb{C}$$

\mathbb{C} -linear.

b)

Definition 5.7. Eine Parametertransformation ist eine Abbildung

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$$

mit

- 1) φ ist stetig, stückweise differenzierbar und bijektiv.
- 2) Es existiert $\delta > 0$, so das $\varphi'(t) > \delta$ für alle t , an denen $\varphi'(t)$ definiert ist.

Man prüft leicht nach, dass φ streng monoton φ^{-1} ebenfalls eine Parametertransformation ist. Sei $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ Integrationsweg. Dann ist $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls ein Integrationsweg. Sei $f: \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(\varphi(s)))\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)ds \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(s)) \cdot \gamma_1'(s)ds = \int_{\gamma_1} f(z)dz. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass das Integral invariant unter Parametertransformationen ist.

c) Seien $\gamma_1: [a, b] \rightarrow U$ und $\gamma_2: [b, d] \rightarrow U$ Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Sei

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, d] \end{cases}$$

Dann ist $\gamma: [a, d] \rightarrow U$ ein Integrationsweg. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Wir schreiben $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg. Sei

$$\gamma_k = \gamma \upharpoonright_{[t_{k-1}, t_k]}.$$

Dann ist γ_k ein Integrationsweg und

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_r.$$

d) Für $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ sei $-\gamma: [a, b] \rightarrow U$ definiert durch $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$. Dann ist

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Für $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ schreiben wir $\gamma_1 - \gamma_2$.

Satz 5.8. *Es gilt*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \max_{t \in [a, b]} \{|f(\gamma(t))|\}$$

Beweis. Da $\text{Sp}(\gamma)$ kompakt ist, existiert $C > 0$, so dass

$$|f(\gamma(t))| \leq C, \quad t \in [a, b].$$

Daraus folgt

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \right| \leq C \int_a^b |\gamma'(t)|dt = C \cdot L(\gamma).$$

□

Satz 5.9. Sei $f_k: \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen. Sei $f: \text{Sp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und (f_k) konvergiere gleichmäßig auf $\text{Sp}(\gamma)$ gegen f . Dann ist f stetig und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz$$

Beweis. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt, dass f stetig ist. Weiter ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f_k(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} (f(z) - f_k(z)) dz \right| \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t)) - f_k(\gamma(t))| \cdot L(\gamma) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Satz 5.10. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $M \subset \mathbb{R}^n$, $f: \text{Sp}(\gamma) \times M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

1) Die Funktion

$$x \in M \mapsto \int_{\gamma} f(z, x) dz = F(x)$$

ist stetig auf M .

2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ stetig auf $\text{Sp}(\gamma) \times M$. Dann ist F stetig partiell nach x_k differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_k}(z, x) dz.$$

3) Sei $M \subset \mathbb{C}$ offen, und f sei für jedes $z \in \gamma$ komplex nach $w \in M$ differenzierbar mit auf $\text{Sp}(\gamma) \times M$ stetiger Ableitung $\frac{\partial f}{\partial w}(z, w)$. Dann ist $F(w)$ holomorph mit

$$F'(w) = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial w}(z, w) dz.$$

Beweis. Aus 2) folgt 3). 1) Ergibt sich wie Satz 5.6 aus der Standardabschätzung. □

6. STAMMFUNKTIONEN

Definition 6.1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Eine Funktion $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f , wenn f holomorph ist und $F' = f$ gilt. Wir sagen, f habe lokale Stammfunktionen auf U , wenn zu jedem $z \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von z existiert, so dass $f|_V$ eine Stammfunktion hat.

Beispiele:

1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad R > 0$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

2)

$$f(z) = (z - z_0)^{-n}, \quad n \neq 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1-n} (z - z_0)^{-n+1}$$

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Weiterhin sei $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist auch $(f \circ \gamma)\gamma'$ stetig und damit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Dies gilt auch für stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma: [a, b] \rightarrow G$. Es sei

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b,$$

eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass

$$\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$$

stetig differenzierbar ist. Denn es gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^r (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Satz 6.2. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z_1$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Bemerkungen.

- Das Integral hängt nur von den Endpunkten von γ ab.
- Wenn γ geschlossen ist, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- Im Reellen hat jede auf einem Intervall stetige Funktion eine Stammfunktion.
- Im Komplexen haben einfache Funktionen wie $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), z \mapsto |z|$ keine Stammfunktion. $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion, da

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Satz 6.3. *Es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Es gelte*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

für alle geschlossenen Integrationswege γ in G . Dann hat f eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $a \in G$ und für jedes $z \in G$ sei γ_z ein Integrationsweg von a nach z . Sei

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Dann ist F wohldefiniert. Denn sei $\tilde{\gamma}_z$ ein weiterer Integrationsweg von a nach z . Dann ist $\gamma = -\tilde{\gamma}_z + \gamma_z$ ein geschlossener Integrationsweg und damit gilt:

$$0 = \int_{\gamma} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(w)dw - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(w)dw.$$

Sei $z_0 \in G$. Weiter sei $z \in G$ hinreichend nah an z_0 . Dann ist $[z_0, z] \subset G$, wobei

$$[z_0, z] := \{z_0 + t(z - z_0) : 0 \leq t \leq 1\}$$

die Verbindungsstrecke von z_0 und z ist. Dann ist $\gamma_{z_0} + [z_0, z] - \gamma_z$ ein geschlossener Weg in G , und damit

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(w)dw + \int_{[z_0, z]} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = 0$$

Daraus folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt = (z - z_0)\varphi(z)$$

mit $\varphi(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt$. Es ist $\varphi(z_0) = f(z_0)$ und $\varphi(z)$ ist stetig in z_0 , da f stetig ist. Daraus folgt, dass F in z_0 komplex differenzierbar ist und $F'(z_0) = f(z_0)$ gilt. \square

Bei Beschränkung auf spezielle Gebiete kann man die Voraussetzungen von Satz 6.3 abschwächen.

Definition 6.4. *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, sodass für alle $z \in G$ die Verbindungsstrecke $[z_0, z]$ vollständig in G liegt.*

- Konvexe Gebiete sind sternförmig.

Satz 6.5. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet mit Sternpunkt z_0 und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ mit z_0 als Ecke gelte*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Dann hat f eine Stammfunktion.

Beweis. Sei G sternförmig mit Sternpunkt a . Sei

$$F(z) := \int_{[a, z]} f(w)dw.$$

Wir zeigen nun, dass F eine Stammfunktion von f ist. Sei $z_0, z \in G$ so, dass $[z_0, z] \subset G$. Sei Δ ein Dreieck mit den Ecken a, z_0, z . Nach Voraussetzung ist

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(w)dw = \int_{[a,z]} f(w)dw - \int_{[z_0,z]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw.$$

Daraus folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

Hieraus folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 6.3. □

7. DER CAUCHYSCHE INTEGRALSATZ

Wir kommen nun zu dem zentralen Theorem der komplexen Analysis. Viele fundamentale Sätzen leiten sich davon ab.

Satz 7.1. (*Lemma von Goursat*) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die in einer Umgebung eines abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset U$ holomorph ist. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

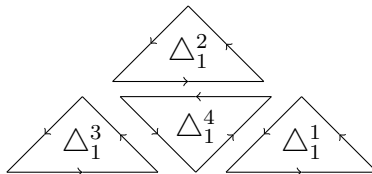
Beweis. Sei Δ ein Dreieck mit den Eckpunkten z_1, z_2, z_3 . Seien $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow U$ für $i = 1, 2, 3$ die Verbindungen zwischen den Eckpunkten, das heißt

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= z_1 + t(z_2 - z_1), \\ \gamma_2(t) &= z_2 + t(z_3 - z_2), \\ \gamma_3(t) &= z_3 + t(z_1 - z_3). \end{aligned}$$

Dann ist $\partial\Delta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ und

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz.$$

Wir zerlegen Δ in vier Teildreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$, indem wir die Seitenmittelpunkte von Δ miteinander verbinden:



Jede Verbindungsstrecke von Seitenmittelpunkten kommt 2 mal als Teilstrecke des Randes der Dreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ vor, jeweils mit entgegengesetzter Orientierung.

Daraus folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz.$$

Und deshalb erhalten wir:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \max_k \left| \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)dz \right|.$$

Es sei Δ_1 eines der Dreiecke $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ so, dass $|\int_{\Delta_1} f(z)dz|$ maximal ist. Dann folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right|.$$

Durch Iteration dieser Konstruktion erhalten wir eine Folge von Teildreiecken

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \cdots$$

mit

$$(7.1) \quad \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Δ_n kompakt sind, existiert ein $z_0 \in \Delta$ mit

$$\bigcap_{n \geq 0} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert nach Lemma 1.2 eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

- 1) φ ist stetig in z_0 und $f'(z_0) = \varphi'(z_0)$.
- 2) $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi'(z_0) + o(|z - z_0|)$.

Es sei

$$r(z) = f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\varphi'(z_0).$$

Dann gilt:

- 1) r stetig in z_0 ,
- 2) $r(z_0) = 0$,
- 3) $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)r(z)$.

Da die lineare Funktion

$$l(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

eine Stammfunktion besitzt, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\partial\Delta_n} l(z)dz = 0.$$

Sei $\text{diam}(\Delta_n) = \max_{z_1, z_2 \in \Delta_n} \{|z_1 - z_2|\}$ Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)r(z)dz \right| \leq L(\partial\Delta_n) \max_{z \in \partial\Delta_n} (|z - z_0||r(z)|) \\ &\leq L(\partial\Delta_n) \text{diam}(\Delta_n) \max_{z \in \Delta_n} |r(z)|. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta_{n-1}) = \dots = 2^{-n}L(\partial\Delta)$$

und

$$\text{diam}(\Delta_n) = 2^{-n} \text{diam}(\Delta).$$

Damit erhalten wir

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq 4^{-n}L(\partial\Delta) \text{diam}(\Delta) \max_{z \in \Delta_n} |r(z)|.$$

Zusammen mit (7.1) ergibt sich

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq L(\partial\Delta) \text{diam}(\Delta) \max_{z \in \Delta_n} |r(z)|.$$

Da $r(z)$ stetig in z_0 ist und $r(z_0) = 0$ folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \Delta_n} |r(z)| = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

□

Theorem 7.2. (Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G .

Beweis. Aus Theorem 7.1 und Satz 6.5 folgt, dass f eine Stammfunktion hat. Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.2. □

Da eine Kreisscheibe konvex ist, folgt unmittelbar der folgende Satz.

Satz 7.3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f lokale Stammfunktionen.

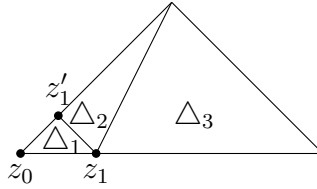
Wir benötigen noch eine geringfügige Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

Lemma 7.4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$. Weiterhin sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck mit $z_0 \in \Delta$. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. In Abhängigkeit von der Lage von z_0 unterscheiden wir drei Fälle.

a) Sei z_0 ein Eckpunkt von Δ . Sei $\epsilon > 0$. Wir zerlegen Δ wie folgt:



Hier werden die Punkte z_1 und z'_1 so gewählt, dass $L(\partial\Delta_1) < \epsilon$. Nach Theorem 7.1 folgt

$$\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0 = \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz.$$

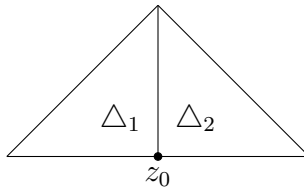
Da f stetig auf Δ ist existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \Delta$. Daraus folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot C < C\epsilon.$$

Da ϵ beliebig gewählt war folgt die Behauptung

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

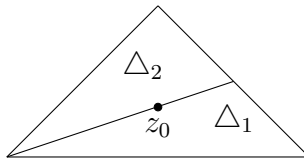
b) z_0 liegt nun auf der Seite von Δ , aber ist kein Eckpunkt. Wir zerlegen Δ wie folgt:



Aus a) folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0.$$

c) z_0 liegt im Inneren von Δ . Wir zerlegen Δ wie folgt:



Aus b) folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0.$$

□

Korollar 7.5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $z_0 \in G$. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G .

Beweis. Aus Lemma 7.4 und Satz 6.5 folgt, dass f eine Stammfunktion hat. Die Behauptung folgt aus Satz 6.2. □

Zusammenhang mit 1-Formen (Pfaffschen Formen)

Definition 7.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine 1-Form auf U . Eine **Stammfunktion** von ω ist eine differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, sodass $\omega = df$ gilt. Eine 1-Form ω heißt **exakt**, wenn ω eine Stammfunktion hat. Sei

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i.$$

Dann bedeutet $df = \omega$, dass $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ für alle $i = 1, \dots, n$ ist.

Bemerkungen.

- Sei ω stetig und f eine Stammfunktion von ω . Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein Integrationsweg. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

- Sei γ geschlossen. Dann ist

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Definition 7.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige 1-Form. ω heißt **lokal exakt** oder **geschlossen**, wenn für alle $x \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von x existiert, so dass $\omega|_V$ exakt ist.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\omega = fdz$. Falls ω exakt ist existiert eine differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$dF = fdz = f dx + i f dy.$$

Das heißt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i f.$$

Daraus folgt

$$(7.2) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Sei $F = u + iv$ mit $u, v: U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann folgt aus (7.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daher ist $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f$.

Wir haben damit folgendes gezeigt:

$$\omega := fdz \text{ ist exakt} \Leftrightarrow f \text{ hat eine komplexe Stammfunktion.}$$

Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen lokal exakter 1-Formen

Definition 7.8. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ stetige Kurven mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) =: x_0, \gamma_0(b) = \gamma_1(b) =: x_1$. γ_0 und γ_1 heißen **(relativ) homotop**, wenn eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$$

existiert mit

1) Für alle $t \in [a, b]$:

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

2) Für alle $s \in [0, 1]$:

$$H(a, s) = x_0, \quad H(b, s) = x_1.$$

Für $s \in [0, 1]$ sei $\gamma_s(t) := H(t, s)$. Dann ist $\gamma_s : [a, b] \rightarrow X$ eine stetige Kurve mit $\gamma_s(a) = x_0$ und $\gamma_s(b) = x_1$.

Definition 7.9. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ geschlossene stetige Kurven. γ_0 und γ_1 heißen **frei homotop**, wenn eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$$

existiert mit:

1) Für alle $t \in [a, b]$:

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

2) Für alle $s \in [0, 1]$:

$$H(a, s) = H(b, s).$$

Das heißt alle Zwischenkurven γ_s sind wieder geschlossene Kurven.

Definition 7.10. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine stetige geschlossene Kurve. γ heißt **nullhomotop**, falls ein $x_0 \in X$ existiert, so dass γ zur konstanten Kurve $\gamma_{x_0} : [a, b] \rightarrow X, \gamma_{x_0}(t) = x_0$ frei homotop ist.

Definition 7.11. Eine zusammenhängende Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls jede geschlossene Kurve in X nullhomotop ist.

Satz 7.12. (Homotopieinvarianz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ Integrationswege. Weiterhin seien γ_0, γ_1 (frei oder relativ) homotop in U . Sei ω eine lokal exakte 1-Form auf U . Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Beweis. Siehe Königsberger, Analysis II, Seite 188 und Seite 198. □

Daraus folgt der entsprechende Satz über Kurvenintegraler holomorpher Funktionen.

Satz 7.13. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ relativ oder frei homotope Integrationswege. Dann gilt:

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Beweis. f hat lokale Stammfunktionen, also ist $\omega = fdz$ lokal exakt. Damit folgt

$$\int_{\gamma_0} fdz = \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} fdz.$$

□

Korollar 7.14. (*Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete*)
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \text{ für alle geschlossenen Integrationswege } \gamma \text{ in } G.$$

Beweis. Klar, da Integrale über konstante Kurven verschwinden. □

8. DIE CAUCHYSISCHE INTEGRALFORMEL

Die Cauchysche Integralformel ist eine Integraldarstellung einer holomorphen Funktion, die zeigt, dass die Werte einer holomorphen Funktion innerhalb eines Kreises durch die Werte auf dem Rand bestimmt sind.

Theorem 8.1. (*Cauchysche Integralformel*)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in G, r > 0$ und $D := D_r(z_0)$ die Kreisscheibe um z_0 mit Radius r , so dass $\bar{D} \subset G$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_r(z_0).$$

Beweis. Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist $U := D_{r+\epsilon}(z_0) \subset G$ eine konvexe Umgebung von z_0 . Für $z \in D$ sei die Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \zeta \neq z \\ f'(z) & , \zeta = z. \end{cases}$$

Dann ist $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $U \setminus \{z\}$. Aus Korollar 7.5 folgt:

$$(8.3) \quad 0 = \int_{\partial D} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nach Satz 5.10 3) ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Die Funktion $\phi(\zeta) = (\zeta - z)^{-2}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ die Stammfunktion $F(\zeta) = -(\zeta - z)^{-1}$. Also folgt

$$\int_{\partial D} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta = 0,$$

und daher

$$\int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i.$$

Zusammen mit (8.3) folgt

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

□

Folgerungen

Der Integrand $\frac{1}{\zeta - z}$ ist holomorph im Punkt $z \in D$. Aus Satz 5.10 3) folgt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \in D.$$

Diese Argument können wir wiederholen. Der Integrand des Integrales ist ebenfalls holomorph für $z \in D$, also ist f' holomorph auf D und es gilt

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta, \quad z \in D.$$

Durch Iteration erhalten wir das

Theorem 8.2. *Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Sei $D := D_r(z_0)$ und $\bar{D} \subset G$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D$:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Bemerkung: Theorem 8.2 zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit ist. Die Ableitung einer reel differenzierbaren Funktion braucht nicht einmal stetig zu sein.

Zusammenhang mit Poissonscher Integralformel

Die Cauchysche Integralformel ordnet sich in einen allgemeineren Zusammenhang ein. Das ist die Poissonsche Integralformel im \mathbb{R}^n . Es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$. Wegen Theorem 8.2 ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Daher ist $u, v \in C^\infty(U)$. Es sei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

der Laplaceoperator in \mathbb{R}^2 . Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$, das heißt, u und v sind harmonische Funktionen.

Sei $r > 1$ und $f: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für $z \in D_1(z_0)$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\zeta}{\zeta - z} d\theta, \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Für $|z| < 1$ ist $\frac{1}{|z|} > 1$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist damit

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (\bar{z})^{-1}} d\zeta.$$

Für $|\zeta| = 1$ ist $\zeta = \bar{\zeta}^{-1}$. Damit erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) \left[\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}^{-1}}{\bar{\zeta}^{-1} - \bar{z}^{-1}} \right] d\theta$$

Weiter ist

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}^{-1}}{\bar{\zeta}^{-1} - \bar{z}^{-1}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} = -\frac{\zeta(\bar{z} - \bar{\zeta}) - \bar{z}(\zeta - z)}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

und für $u = \operatorname{Re} f$

$$u(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

Im \mathbb{R}^n betrachten wir nur den **Poisson-Kern**

$$K(x, y) := \frac{r^2 - \|x\|^2}{n\omega_{n-1}r} \frac{1}{\|x - y\|^n}, \quad x \in B_r(0), \quad y \in \partial B_r(0),$$

wobei

$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$$

und

$$\omega_{n-1} = \operatorname{vol}(S^{n-1}).$$

Theorem 8.3. Sei $g \in C(\partial B_r(0))$ und

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} K(x, y) g(y) dS(y).$$

Dann gilt:

- (1) $u \in C^\infty(B_r(0))$.
- (2) $\Delta u = 0$ in $B_r(0)$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in B_r(0)} u(x) = g(x_0)$, $x_0 \in \partial B_r(0)$.

Beweis. Siehe L.C.Evans: Partial Differential Equations, S.41, Theorem 15.

Holomorphiekriterien

Satz 8.4. (*Morera*)

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Dann ist f holomorph auf G .

Beweis. Sei $D \subset G$ eine Kreisscheibe. Aus Satz 6.5 folgt, dass es eine Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$. Mit Theorem 8.2 folgt, dass $F': D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und damit ist auch f holomorph. \square

Bemerkung: Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Aus Lemma 7.3 folgt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

für jedes $\Delta \subset G$. Mit Satz 8.4 folgt, dass f holomorph auf ganz G ist. Damit ist die Bedingung an eine Funktion stetig zu sein und nur holomorph mit Ausnahme eines Punktes zu sein nur scheinbar allgemeiner als die Holomorphie auf ganz G .

Satz 8.5. (*Riemannscher Hebbarkeitssatz*)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$. Sei $f: G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_{G \setminus \{z_0\}} = f$.

Beweis. Da f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Sei $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0)f(z) & , z \neq z_0 \\ 0 & , z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist F stetig und holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Mit obiger Bemerkung folgt, dass $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Es gilt:

$$F'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Da der Grenzwert existiert, kann f eindeutig zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden, die $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Aus der Bemerkung folgt, dass \tilde{f} holomorph ist. \square

Beispiel: Es sei

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \neq 0.$$

Aus der Potenzreihe von $\sin(z)$ ergibt sich

$$f(z) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \dots$$

Daraus folgt $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$. Anwendung des Hebbarkeitssatzes ergibt, dass f durch $f(0) = 1$ zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

9. POTENZREIHENENTWICKLUNG HOLOMORPHER FUNKTIONEN

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass eine einmal komplex differenzierbare Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Wir zeigen jetzt, dass holomorphe Funktionen sogar lokal in Potenzreihen entwickelt werden können.

Definition 9.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt um $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickelbar, wenn folgendes gilt: Es existiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und $0 < r \leq R$ mit $D_r(z_0) \subset U$ und

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in D_r(z_0).$$

Nach Satz 3.5 ist f holomorph auf $D_r(z_0)$.

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : D_r(z_0) \subset U\}.$$

Sei $r < R$ und $\gamma = \partial D_r(z_0)$, wobei γ als positiv orientierte Kurve aufgefasst wird. Aus Satz 8.1 folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_r(z_0).$$

Wir entwickeln den „Cauchy-Kern“ $\frac{1}{\zeta - z}$ in eine geometrische Reihe nach Potenzen von $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0|, \quad \zeta \in \gamma, \quad z \in D_r(z_0).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für $\zeta \in \gamma$ und es ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k d\zeta, \quad z \in D_r(z_0).$$

Sei $z \in D_r(z_0)$ fest und $q = \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|$. Dann ist $0 < q < 1$ für $\zeta \in \gamma$ und

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right| \leq |\zeta - z_0|^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k < |\zeta - z_0|^{-1} \frac{q^N}{1 - q}.$$

Das zeigt, dass die Reihe gleichmäßig für $\zeta \in \gamma$ konvergiert. Daher kann die Reihe gliedweise integriert werden:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Sei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D_r(z_0).$$

Aus Theorem 8.2 folgt, dass

$$a_k = \frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}.$$

Daher ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z \in D_r(z_0).$$

Wir haben damit folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 9.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann f in jeder Kreisscheibe $D_r(z_0) \subset U$ in eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

entwickelt werde und es gilt:

(1) *Es sei R der Konvergenzradius der Reihe. Dann ist*

$$R \geq d(z_0, \partial U) = \inf_{\zeta \in \partial U} |z - \zeta|.$$

(2) *$\forall k \in \mathbb{N}$ und $0 < r < R$ ist*

$$a_k = \frac{f^{(n)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Bemerkungen:

1) Es sei $R > 0$ der Konvergenzradius von $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Dann gilt im allgemeinen nicht:

$$f(z) = P(z), \quad z \in D_R(z_0) \cap U.$$

2) Theorem 9.2 gilt nicht für C^∞ -Funktionen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^\infty(I)$, $a \in I$ und

$$Tf(x; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

sei die Taylorreihe von f in a . Dann ist folgendes möglich:

i) $Tf(x; a)$ kann Konvergenzradius Null haben. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+x^2t} dt$$

Es gilt

$$Tf(x; 0) = 1 - x^2 + 2!x^4 - 3!x^6 + 4!x^8 - \dots$$

ii) $Tf(x; a)$ konvergiert in $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, aber $f(x) \neq Tf(x; a)$, $|x - a| < \epsilon$. Ein Beispiel dafür ist die folgende Funktion.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & , x > 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daher ist $Tf(x, 0) = 0$ und $Tf(x, 0) \neq f(x)$.

Beispiel für Potenzreihenentwicklungen:

Es sei $f(z) = (z - a)^{-1}$, $z_0 \neq a$. Dann ist

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{z - z_0 - (a - z_0)} = -\frac{1}{a - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei $a_n = -(a - z_0)^{-(n+1)}$. Der Konvergenzradius ist $R = |z_0 - a|$.

Satz 9.3. *Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann existiert keine offene Umgebung U mit $U \supset \overline{D_R(z_0)}$ und eine holomorphe Funktionen $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass*

$$\tilde{f} \upharpoonright_{D_R(z_0)} = f.$$

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $U \supset \overline{D_R(z_0)}$ und $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\tilde{f} \upharpoonright_{D_R(z_0)} = f$. Da U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $D_{R+\epsilon} \subset U$. Aus Theorem 9.2 folgt, dass ein $R' > R$ existiert, so dass

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z \in D_{R'}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist. \square

Bemerkung: Dies gilt nicht im Reellen. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Dann ist

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1.$$

Der Konvergenzradius ist 1. Aber $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist C^∞ , sogar reell analytisch.

Der folgende Satz faßt alle bisherigen Holomorphiekriterien zusammen.

Satz 9.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) f ist holomorph.
- 2) f besitzt lokale Stammfunktionen.
- 3) f ist reell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.
- 4) Um jedes $z_0 \in U$ kann f in eine Potenzreihe entwickelt werden.
- 5) f ist stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset U$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Definition 9.5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $A \subset G$. A heißt diskret in G , wenn gilt:

$$\forall z_0 \in G \exists r > 0 : \#(D_r(z_0) \cap A) < \infty.$$

Eine äquivalente Formulierung ist: $A \subset G$ ist diskret $\Leftrightarrow A$ hat keinen Häufungspunkt in G .

Achtung. Eine diskrete Menge kann Häufungspunkt in ∂G haben.

Satz 9.6. (Identitätssatz) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) $f(z) \equiv 0$
- 2) Es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- 3) Es existiert eine nichtdiskrete Teilmenge $A \subset G$ mit

$$\forall z \in A : f(z) = 0.$$

Beweis. Die Implikation (1) \Rightarrow (2) ist klar. Wir zeigen jetzt, dass aus (2) die Aussage (1) folgt. Es sei $z_0 \in G$ und es gelte $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Sei

$$M = \{z \in G : f^{(k)}(z) = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dann gilt:

- i) $M \neq \emptyset$, da $z_0 \in M$.
- ii) M ist abgeschlossen in G .

Beweis. Nach Definition ist

$$M = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{z \in M : f^{(k)}(z) = 0\}$$

Da $f^{(k)}: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, ist $(f^{(k)})^{-1}(0)$ abgeschlossen. Damit ist M als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen. \square

- iii) M ist offen.

Beweis. Sei $z_1 \in M$. Es existiert $r > 0$, so dass $\overline{D_r(z_1)} \subset G$. Aus Theorem 9.2 folgt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k, \quad z \in D_r(z_1).$$

Da $z_1 \in M$, ist $f^{(k)}(z_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daher $f|_{D_r(z_1)} \equiv 0$. Daraus folgt $D_r(z_1) \subset M$. \square

Damit haben wir gezeigt, dass M eine nicht leere offene und abgeschlossene Menge in G ist. Da G zusammenhängend ist, folgt $M = G$. Daher ist $f \equiv 0$.

1) \Rightarrow 3) ist klar.

3) \Rightarrow 2) Sei $A \subset G$ nicht diskret und $f|_A \equiv 0$. Da A nicht diskret in G ist, existiert in G ein Häufungspunkt z_0 von A . Daher existiert eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $z_k \neq z_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k.$$

Wir zeigen mittels Induktion: $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$, ist $f(z_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0.$$

Das ist der Induktionsanfang. Wir nehmen jetzt an, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ für $k = 0, \dots, n-1$ gilt. Dann existiert $r > 0$, so dass

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in D_r(z_0).$$

Dabei ist $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Sei $z_j \in D_r(z_0)$. Dann ist

$$0 = f(z_j) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z_j - z_0)^k.$$

Sei

$$g(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}.$$

Die Reihe konvergiert absolut in $D_r(z_0)$. Daher ist $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere ist g in z_0 stetig. Weiter ist

$$0 = a_n + (z_j - z_0)g(z_j)$$

Daraus folgt

$$a_n = \lim_{j \rightarrow \infty} (a_n + (z_j - z_0)g(z_j)) = 0.$$

Damit haben wir den Identitätssatz bewiesen. \square

Korollar 9.7. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) $f \equiv g$
- 2) Es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- 3) Es existiert eine nichtdiskrete Teilmenge $A \subset G$ mit

$$\forall z \in A : f(z) = g(z).$$

Beweis. Satz 9.6 auf $f - g$ anwenden. □

Bemerkung: Die reellen elementaren Funktionen $\sin, \cos, e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ können wegen des Identitätssatzes nur auf eine Weise zu holomorphen Funktionen fortgesetzt werden.

Analytische Fortsetzung

Es seien $G \subset G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Aus dem Identitätssatz folgt, dass höchstens eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: G' \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $\tilde{f}|_G = f$. Wenn \tilde{f} existiert, so heißt \tilde{f} die **analytische Fortsetzung** von f .

Bemerkungen.

1) Das gilt nicht für reell differenzierbare Funktionen.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|z|^2}\right), & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, $f \not\equiv 0$ und $f|_{\mathbb{C} \setminus D_1(0)} = 0$. D.h. f ist eine von Null verschiedene Fortsetzung der Funktion, die identisch Null ist auf $\mathbb{C} \setminus D_1(0)$.

2) Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $C \subset G$ eine Kurve. Dann ist f durch $f|_C$ eindeutig bestimmt. Man erhält daraus das **Permanenzprinzip**: "Identitäten zwischen Funktionen, die auf C gelten, setzen sich auf G fort".

Beispiel: Sei $f(z) = \cot(\pi z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dann ist $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Aus dem Identitätssatz folgt $f(z+1) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Beispiele für analytische Fortsetzung

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung spielt in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle wie z.B. in der analytischen Zahlentheorie. Wir diskutieren einige Beispiele.

1) Die Riemannsche Zetafunktion

Als ein wichtiges Beispiel betrachten wir die Riemannsche Zetafunktion. Aus Analysis I wissen wir Folgendes: Es sei $\sigma > 1$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < \infty.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(s) = n^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$|f_n(s)| = n^{-\operatorname{Re}(s)}.$$

Sei $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$. Dann folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(s)| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < \infty.$$

Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ konvergiert. Weiter ist $f'_n(s) = -\log(n)/n^s$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \quad \text{für } \sigma > 1.$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(s)$ lokal gleichmäßig in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$. Sei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Dann folgt, dass $\zeta(s)$ eine holomorphe Funktion in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ ist. Unser Ziel ist es, $\zeta(s)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortzusetzen. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

a) Die Gammafunktion.

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ sei

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Das Integral konvergiert absolut und lokal gleichmäßig in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Man kann nun zeigen, dass $\Gamma(s)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ analytisch fortgesetzt werden kann. Weiterhin ist $1/\Gamma(s)$ eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion, deren Nullstellen die Menge $\{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist.

b) Poissonsche Summationsformel (PSF)

Es sei

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, N \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| (1 + |x|)^N < \infty\}$$

der Raum der schnell fallenden Funktionen auf \mathbb{R} . Wir erinnern an die Fouriertransformation. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert als

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i u x} dx.$$

Lemma 9.8. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann ist*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Beweis. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sei

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k).$$

Dann ist $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt $F(x+1) = F(x)$. Wir können daher F in die Fourierreihe entwickeln. Es ist

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

mit

$$a_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Wenn wir die Definition von F einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n x}.$$

Wenn wir nun $x = 0$ setzen, so erhalten wir die behauptete Gleichung. □

Es sei $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$, $t > 0$. Dann ist bekanntlich

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi u^2 / t}.$$

Aus Lemma 9.8 erhalten wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 / t}$$

Es sei

$$\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}, \quad t > 0.$$

Dann haben wir folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 9.9. *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta(1/t).$$

Sei $\lambda > 0$. Mittels der Substitution $t = u/\lambda$ folgt

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} t^{s-1} dt = \Gamma(s) \lambda^{-s}.$$

Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) &= \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n^2)^{-s} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s-1} dt \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t) t^{s-1} dt - \frac{1}{2s} \\ &= \int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s-1} dt + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \theta(1/t) t^{-s-1} dt - \frac{1}{2s}.\end{aligned}$$

Anwendung von Lemma 9.9 ergibt für das 2. Integral

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \theta(t) t^{-s-1/2} dt = \int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{-s-1/2} dt - \frac{1}{1-2s}.$$

In der resultierenden Gleichung ersetzen wir s durch $s/2$ und erhalten damit

$$(9.4) \quad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_1^{\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} \left(t^{s/2-1} + t^{(1-s)/2-1} \right) dt - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Theorem 9.10. *Es sei $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Dann ist $\xi(s)$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und es gilt folgende Funktionalgleichung:*

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Beweis. Für $t \geq 1$ gilt folgende Abschätzung

$$\frac{\theta(t) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} e^{-\pi t}.$$

Es sei $\operatorname{Re}(s) \leq c$. Dann ist

$$\int_1^{\infty} |t^s e^{-\pi t}| dt \leq \int_1^{\infty} t^c e^{-\pi t} dt < \infty.$$

Daraus folgt, dass das Integral

$$\int_1^{\infty} \left(t^{s/2-1} + t^{(1-s)/2-1} \right) \frac{\theta(t) - 1}{2} dt$$

absolut und lokal gleichmäßig in \mathbb{C} konvergiert und unter der Substitution $s \mapsto 1-s$ invariant ist. Aus (9.4) folgt die Behauptung. \square

Nach Definition von $\xi(s)$ ist

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s).$$

Die Funktion $1/\Gamma(s/2)$ ist holomorph in \mathbb{C} . Die Nullstellen sind $-2n, n \in \mathbb{N}_0$. Zusammen mit Theorem 9.10 erhalten wir die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Da $s = 0$ eine Nullstelle von $1/\Gamma(s/2)$ ist, folgt aus dem Hebbarkeitssatz, dass $\zeta(s)$ zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden kann. Außerdem gilt die Funktionalgleichung

$$(9.5) \quad \zeta(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s).$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Zetafunktion ist die Darstellung als Eulerprodukt.

Satz 9.11. Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ ist

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

wobei sich das Produkt über alle Primzahlen erstreckt.

Beweis. Für $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ ist

$$|p^{-s}| = p^{-\sigma} < \frac{1}{2} < 1.$$

Wir können daher $(1 - p^{-s})^{-1}$ in die geometrische Reihe entwickeln

$$(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}.$$

Für $x > 0$ sei

$$P(x) = \prod_{p \leq x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} \right).$$

Sei

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} : p|n \Rightarrow p \leq x\}.$$

Dann ist

$$P(x) = \sum_{n \in N(x)} n^{-s}.$$

Sei

$$M(x) = \{n \in \mathbb{N} : \exists p > x \text{ mit } p|n\}.$$

Dann ist

$$P(x) - \xi(s) = - \sum_{m \in M(x)} m^{-s}.$$

Für $m \in M(x)$ ist offenbar $m > x$. Daraus folgt

$$|P(x) - \xi(s)| \leq \sum_{m \in M(x)} m^{-\sigma} < \sum_{n < x} n^{-\sigma}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ konvergiert, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \zeta(s).$$

□

Da für $\operatorname{Re}(s) > 1$ das Eulerprodukt konvergiert ist $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \neq 0$. Aus Satz 9.11 folgt $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$. Wir wenden jetzt die Funktionalgleichung (9.5) an. Da die Nullstellen von $1/\Gamma(s/2)$ in $\operatorname{Re}(s) < 0$ die Zahlen $-2n$, $n \in \mathbb{N}$, sind, folgt dass $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Nullstellen von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) < 0$ ist. Diese Nullstellen nennt man die *trivialen Nullstellen* der Zetafunktion. Die *nichttrivialen Nullstellen* liegen damit alle im Streifen $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

Riemannsche Vermutung. Die nichttrivialen Nullstellen liegen alle auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Die Riemannsche Vermutung wurde 1859 von B. Riemann formuliert. Sie ist gegenwärtig eine der bedeutendsten Vermutungen in der Mathematik und ist eines der sogenannten *Millenniumsprobleme*.

Bekannt ist das folgende Ergebnis von De la Vallée Poussin.

Satz 9.12. *Es existiert $c > 0$, so dass*

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \quad \sigma > 1 - \frac{c}{\log|t|}, \quad |t| \geq 3.$$

Daraus folgt der *Primzahlsatz*. Es sei

$$\pi(x) = \#\{p: p \text{ Primzahl}, p \leq x\}$$

die Primzahlzählfunktion. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1,$$

oder anders formuliert

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Es sei

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

der Integrallogarithmus. $\operatorname{Li}(x)$ hat die folgende asymptotische Entwicklung

$$\operatorname{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln(x))^k}.$$

Eine genauere Form des Primzahlsatzes ist

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(xe^{-a\sqrt{\ln(x)}})$$

für $x \rightarrow \infty$. Wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, dann gilt eine viel schärfere Abschätzung des Restgliedes. Und zwar ist dann

$$\pi(x) = \operatorname{Li}(x) + O(\sqrt{x} \ln(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Dies ist nur ein Grund für die Bedeutung der Riemannschen Vermutung. Es gibt eine ganze Reihe von Resultaten, die unter der Voraussetzung der Riemannschen Vermutung gelten.

2) Dirichletsche L -Reihen

Eine Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion sind Dirichletsche L -Reihen, die in der analytischen Zahlentheorie ebenfalls eine wichtige Rolle spielen. Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\hat{\chi}: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

ein Charakter, d.h. ein Homomorphismus der Gruppen. Mittels $\hat{\chi}$ definieren wir eine Abbildung $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ durch

$$\chi(n) := \begin{cases} \hat{\chi}([n]), & (n, N) = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $[n] \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ die Restklasse von n . χ heißt **Dirichletscher Charakter modulo N** . Es sei

$$L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Da $|\chi(n)| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert die Reihe absolut und lokal gleichmäßig in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Wie im Falle der Riemannschen Zetafunktion kann man zeigen, dass $L(s, \chi)$ folgende Eigenschaften hat:

- 1) $L(s, \chi)$ kann analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden.
- 2) Es sei χ_0 der triviale Charakter. Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(s, \chi)$ holomorph auf \mathbb{C} .
- 3) Es gilt eine Funktionalgleichung der Form

$$\pi^{-s/2} N^{s/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi) = \frac{G}{i^\delta \sqrt{N}} N^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}).$$

Dabei ist $\delta = 0, 1$, in Abhängigkeit davon, ob $\chi(-1) = 1$ oder $\chi(-1) = -1$ ist.

4)

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

- 5) Für $\chi \neq \chi_0$ ist $L(1, \chi) \neq 0$.

Dirichlet hat die L -Reihen benutzt, um das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 9.13. *Es seien $k, m \in \mathbb{N}$ mit $(k, m) = 1$. Sei $a_n := nk + m$, $n \in \mathbb{N}$. Die arithmetische Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält unendlich viele Primzahlen.*

Das ist der **Dirichletsche Primzahlsatz**. Ein weiteres wichtiges Resultat, das Dirichlet mit Hilfe von L -Reihen bewiesen hat, ist die **analytische Klassenzahlformel**.

3) Die L -Funktion einer elliptischen Kurve

Vielen "arithmetischen Objekten" können Dirichletsche Reihen zugeordnet werden. Beispiele sind die **Dedekindsche Zetafunktion** $\zeta_K(s)$ eines Zahlkörpers K , die Artinsche L -Funktion $L(s; \rho)$ einer Darstellung ρ der Galoisgruppe und die Hasse-Weil-Zetafunktion $L(s, X)$ einer algebraischen Varietät X über \mathbb{Q} . Das Hauptproblem ist dann, zu zeigen, dass die Dirichletschen Reihen eine analytische Fortsetzung auf \mathbb{C} haben und einer Funktionalgleichung genügen.

Als Beispiel betrachten wir eine elliptische Kurve E die über \mathbb{Q} definiert ist. Sie ist durch eine Weierstraßsche Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

mit rationalen Koeffizienten a, b gegeben. Für jede Primzahl p gibt es ein (im wesentlichen eindeutig bestimmtes) “Néron’sches Modell” E_p für E , dass durch eine Gleichung

$$Y^2 + \lambda XY + \mu Y = X^3 + \alpha X + \gamma$$

mit ganzen p -adischen Koeffizienten gegeben ist und über dem Körper der p -adischen Zahlen \mathbb{Q}_p birational äquivalent zu E ist. Wenn man die Gleichung modulo p reduziert, erhält man die Gleichung einer irreduziblen Kurve \bar{E}_p über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p . Für fast alle p ist \bar{E}_p eine nichtsinguläre elliptische Kurve. Es sei c_p die Anzahl der über \mathbb{F}_p rationalen Punkte auf der Kurve \bar{E}_p und $a_p := p + 1 - c_p$. Dann ist der Eulerfaktor $L_p(s, E)$ definiert durch

$$L_p(s, E) = (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}.$$

Wenn \bar{E}_p einen gewöhnlichen Doppelpunkt hat, setzt man

$$L_p(s, E) = (1 - \varepsilon_p p^{-s})^{-1},$$

wobei $\varepsilon_p = \pm 1$ ist und der Wert davon abhängt, ob die Tangenten am Doppelpunkt rational über \mathbb{F}_p sind oder nicht. Schließlich setzt man für den Fall, dass \bar{E}_p eine Spitze hat, $L_p(s, E) = 1$. Die L -Funktion der elliptischen Kurve E ist dann definiert als das Eulerprodukt

$$L(s, E) := \prod_p L_p(s, E).$$

Für die Koeffizienten a_p gilt die Abschätzung $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. Daraus folgt, dass das Produkt absolut und lokal gleichmäßig in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 3/2$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert. Es gilt nun

Theorem 9.14. *$L(E, s)$ hat eine analytische Fortsetzung zu einer holomorphen Funktion auf \mathbb{C} . Es sei N der Führer von E und $\Lambda(s) = (2\pi)^{-s} N^{s/2} \Gamma(s) L(s, E)$. Dann gilt die Funktionalgleichung*

$$\Lambda(s, E) = w \Lambda(2 - s, E),$$

wobei $w = \pm 1$.

Dieses Theorem ist eine Folgerung aus dem Beweis der Shimura-Taniyama-Weil Vermutung (Modularitätsvermutung) durch Wiles, Taylor, Diamond, Conrad und Bruil. Diese besagt folgendes.

Theorem 9.15. *Es sei E eine elliptische Kurve über \mathbb{Q} mit L -Reihe*

$$L(s, E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Es sei f die Funktion auf der oberen Halbebene, die definiert ist durch

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \quad \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Dann ist f eine automorphe Spitzenform vom Gewicht 2 für die Gruppe

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Die Gruppe $\Gamma_0(N)$ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und operiert durch gebrochene lineare Transformationen auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Automorphe Spitzenform vom Gewicht 2 bedeutet, dass sich f wie folgt transformiert

$$(9.6) \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Für die analytische Fortsetzung von $L(s, E)$ spielt f die gleiche Rolle wie die Thetareihe $\theta(t)$ für die Riemannsche Zetafunktion. Es gilt

$$(9.7) \quad (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, E) = \int_0^\infty f(iy) y^{s-1} dy.$$

Da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, folgt aus (9.6)

$$f\left(\frac{i}{Ny}\right) = (iNy)^2 f(iy), \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Wie im Falle der Riemannschen Zetafunktion kann man diese Gleichung zusammen mit (9.7) verwenden, um die analytische Fortsetzung von $L(s, E)$ und ihre Funktionalgleichung herzuleiten.

Im Zusammenhang mit der L -Reihe $L(s, E)$ gibt es eine weitere wichtige Vermutung. Es sei $E(\mathbb{Q})$ die Menge der rationalen Punkte auf der Kurve E . $E(\mathbb{Q})$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus E(\mathbb{Q})_{tors},$$

wobei $E(\mathbb{Q})_{tors}$ eine endliche abelsche Gruppe ist. r ist der Rang von $E(\mathbb{Q})$.

Vermutung (Birch und Swinnerton-Dyer) Die Taylorentwicklung von $L(s, E)$ in $s = 1$ hat die Form

$$L(s, E) = c(s-1)^r + O((s-1)^{r+1}),$$

mit $c \neq 0$ und $r = \mathrm{Rang}(E(\mathbb{Q}))$.

Dies ist ein weiteres **Millenniumproblem**.

Die Untersuchung von L -Reihen obiger Art und ihre Beziehung zur Theorie der automorphen Formen ist ein aktuelles Forschungsgebiet in der Mathematik. Das Problem der analytischen Fortsetzung von Dirichletschen Reihen, die aus der Zahlentheorie hervorgehen, ist ein zentrales Thema.

Werte holomorpher Funktionen

Satz 9.16. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Für alle $a \in \mathbb{C}$ ist

$$f^{-1}(a) = \{z \in G : f(z) = a\}$$

diskret und abgeschlossen in G (eventuell $= \emptyset$). Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ ist $f^{-1}(a) \cap K$ endlich.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{C}$. Die Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, also ist $f^{-1}(a)$ abgeschlossen. Sei $A = f^{-1}(a)$ nicht diskret. Dann ist $A \subset G$ eine nicht diskrete Teilmenge, für die gilt $f(z) = a$ für alle $z \in A$. Aus dem Identitätssatz folgt dann $f \equiv a$. Daher ist A diskret.

Sei $K \subset G$ kompakt. Sei $a \in \mathbb{C}$, so dass $|f^{-1}(a) \cap K| = \infty$. Dann existiert eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $f^{-1}(a) \cap K$ mit $z_k \neq z_l$, für $k \neq l$. Da $f^{-1}(a) \cap K$ kompakt ist, hat die Folge (z_k) einen Häufungspunkt $z_0 \in f^{-1}(a) \cap K$. Aber $f^{-1}(a)$ ist diskret. Also folgt, dass $|f^{-1}(a) \cap K| < \infty$. \square

Bemerkungen:

1) Dies gilt nicht für reell differenzierbare Funktionen.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $x_n = \frac{1}{\pi n}$. Dann ist $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und x_n konvergiert gegen 0.

2) Nullstellen einer holomorphen Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ können sich am Rand von G häufen.

Beispiel: Sei $f(z) = \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann ist

$$\left\{ \frac{n\pi + 1}{n\pi - 1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

die Menge der Nullstellen von f und es gilt

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi + 1}{n\pi - 1}.$$

Nullstellen holomorpher Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $f \not\equiv 0$. Aus Satz 9.6 folgt, dass für jedes $z_0 \in G$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Definition 9.17. Für $z \in G$ sei

$$o_z(f) := m = \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z) \neq 0\}.$$

$o_z(f)$ heißt die **Ordnung** oder **Vielfachheit** von f in z . Für $f \equiv 0$ setzen wir $o_z(f) = \infty$.

Für $z \in G$ gilt

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow o_z(f) > 0.$$

Wir sagen, dass f in $z_0 \in G$ den Wert $w \in \mathbb{C}$ von Ordnung m annimmt, wenn

$$o_z(f - w) = m$$

gilt.

Lemma 9.18. *Für alle holomorphen Funktionen f, g , die im Punkt $z \in G$ holomorph sind, gilt:*

- (1) $o_z(fg) = o_z(f) + o_z(g)$
- (2) $o_z(f + g) \geq \min\{o_z(f), o_z(g)\}$, „=“ gilt dann, wenn $o_z(f) \neq o_z(g)$ ist.

Beweis. Übung!

Lemma 9.19. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- 1) f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n .
- 2) Für die Taylorentwicklung von f in z_0 gilt

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_n \neq 0.$$

- 3) Es existieren $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset U$ und eine holomorphe Funktion $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

Beweis. (1) \Rightarrow (2) klar, da $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

(2) \Rightarrow (3) Sei

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}.$$

g konvergiert in $D_r(z_0)$ mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Daher ist $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $g(z_0) = a_n \neq 0$. Aus der Definition folgt

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

(3) \Rightarrow (1) Sei $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so dass $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ gilt für $z \in D_r(z_0)$. Aus der Leibnizregel folgt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} n(n-1) \cdots (n-j+1) (z - z_0)^{n-j} g^{(j)}(z).$$

Für $k < n$ folgt $f^{(k)}(z_0) = 0$. Für $k = n$ folgt $f^{(k)}(z_0) = n!g(z_0) \neq 0$. □

10. CAUCHYSISCHE UNGLEICHUNG UND MAXIMUMPRINZIP

Satz 10.1. (*Cauchysche Ungleichung*)

Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $r > 0$ und $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Für $z \in D_r(z_0)$ sei

$$d_z = \min_{|\zeta - z_0| = r} |z - \zeta|.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in D_r(z_0)$:

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \frac{r}{d_z^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Beweis. Auf Grund der Cauchyschen Integralformel ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

für alle $z \in D_r(z_0)$. Daraus folgt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{|f(\xi)|}{|\zeta - z|^{n+1}} d\zeta \leq n! \frac{r}{d_z^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

□

Korollar 10.2. *Es gilt*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Bemerkung: Es sei

$$M(r) = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

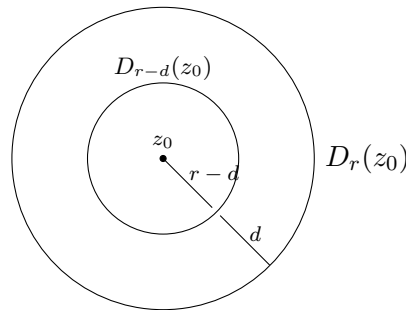
Dann gilt für die Taylorkoeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ die Abschätzung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Korollar 10.3. *Für $d < r$ und alle $z \in D_{r-d}(z_0)$ gilt:*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{d^{n+1}} r M(r).$$

Beweis. Betrachte:



$\forall z \in D_{r-d}(z_0) : d_z = \min_{|\zeta-z_0|=r} |z - \zeta| \geq d.$ □

Aus Satz 10.1 erhält man auch erste Aussagen über die Werteverteilung einer holomorphen Funktionen:

Satz 10.4. *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Wenn*

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

gilt, dann existiert ein $w \in D_r(z_0)$ mit $f(w) = 0$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_r(z_0)$ ist. Aus

$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

folgt, dass $f(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \partial D_r(z_0)$. Daher ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{D_r(z_0)}$. Daraus folgt, dass eine Umgebung V von $\overline{D_r(z_0)}$ existiert mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Es sei

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad z \in V.$$

Dann ist $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Aus Korollar 10.2 für $n = 0$ folgt

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|,$$

das heißt

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z)|}.$$

Somit ist

$$|f(z_0)| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muss f wenigstens eine Nullstelle in $D_r(z_0)$ haben. □

Satz 10.5. *(Gebietstreue)*

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.

Beweis. Da f stetig ist, ist $f(G)$ zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass $f(G) \subset \mathbb{C}$ offen ist. Es sei $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $w_0 = f(z_0)$. Da die Nullstellen von $f(z) - w_0$ diskret sind, existiert ein $r > 0$, sodass $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ und

$$\forall z \in \partial D_r(z_0) : f(z) \neq w_0.$$

Da $\partial D_r(z_0)$ kompakt ist, folgt daraus, dass ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$|f(z) - w_0| \geq 3\epsilon > 0 \text{ für } |z - z_0| = r.$$

Es sei $|w - w_0| < \epsilon$. Dann gilt für $z \in \partial D_r(z_0)$:

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon.$$

Für $z = z_0$ ist aber

$$|f(z_0) - w| = |w - w_0| < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$|f(z_0) - w| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|.$$

Auf Grund von Satz 10.4 hat $f(z) - w$ mindestens eine Nullstelle $z_1 \in D_r(z_0)$, das heißt $f(z_1) = w$. Damit haben wir gezeigt:

$$B_\epsilon(w_0) \subset f(G),$$

also ist $f(G)$ offen. □

Gutzmersche Formel

Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in $D_R(z_0)$ konvergent für $R > 0$. Sei $0 < r < R$ und $|z - z_0| = r$. Dann ist

$$z = z_0 + re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

und daher ist

$$f(z_0 + re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi}$$

eine trigonometrische Reihe.

Für die Funktion $e^{ik\varphi}$ gelten die Orthogonalitätsrelationen.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Da $f(z_0 + re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi}$ in $[0, 2\pi]$ normal konvergiert, folgt

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei

$$M(r) := \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Satz 10.6. (*Gutzmersche Formel*)

Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergent in $D_R(z_0)$. Dann gilt für alle $0 < r < R$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq M(r)^2.$$

Beweis. Wegen

$$\overline{f(z_0 + re^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\varphi}$$

gilt

$$|f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi}.$$

Da diese Reihe in $[0, 2\pi]$ normal konvergiert, folgt aus den Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq 2\pi M(r)^2.$$

□

Korollar 10.7. Die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiere in $D_R(z_0)$. Es existiere $0 < r < R$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_m| r^m = M(r)$. Dann ist

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m.$$

Beweis. Aus Satz 10.6 folgt

$$\sum_{k \neq m}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq 0.$$

Daher ist $a_k = 0$ für alle $k \neq m$.

□

Satz 10.8. (*Maximumprinzip*)

- 1) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant in G .
- 2) Wenn G beschränkt ist und f auf \overline{G} stetig fortsetzbar ist, so nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an:

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Beweis. Sei $z_0 \in G$ ein lokales Maximum von $|f|: G \rightarrow \mathbb{R}$. Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Taylorreihe von f in z_0 , die für $|z - z_0| < R$ konvergiere. Es sei $0 < r < R$ so, dass $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ und

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \overline{D_r(z_0)}.$$

Aus Korollar 10.2 folgt

$$|a_0| = |f(z_0)| \geq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \geq |f(z_0)|,$$

das heißt, es gilt

$$|a_0| = M(r).$$

Aus Korollar 10.7 folgt $f(z) = a_0$ für alle $z \in D_r(z_0)$ und aus dem Identitätssatz erhalten wir $f \equiv a_0$.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten. Da \bar{G} kompakt ist und f stetig auf \bar{G} , nimmt f sein Maximum in \bar{G} an. Auf Grund von 1) muss dieses Maximum auf dem Rand liegen. \square

Satz 10.9. (*Minimum-Prinzip*)

- 1) Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ habe in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.
- 2) Sei G beschränkt und sei f stetig fortsetzbar auf \bar{G} . Dann hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt sein Minimum auf ∂G an.

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(z_0) \neq 0$ ist. Dann existiert ein $r > 0$ so, dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_r(z_0)$. Es sei $g(z) = 1/f(z)$ für $z \in D_r(z_0)$. Dann ist $g : D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ist ein lokales Maximum von $|g(z)| = 1/|f(z)|$. Aus Satz 10.8 folgt, dass f konstant ist.

Es sei G beschränkt und $\bar{f} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f auf \bar{G} . Wir nehmen an, dass f keine Nullstellen in \bar{G} hat. Dann ist $g(z) = 1/f(z)$ eine holomorphe Funktion auf G , die eine stetige Fortsetzung $\bar{g}(z) = 1/\bar{f}(z)$ auf \bar{G} hat. Aus Satz 10.8, (2) folgt:

$$|g(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |g(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Daher ist

$$|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|, \quad z \in G.$$

\square

Ganze Funktionen und Polynome

Definition 10.10. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **ganze Funktion**.

Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beispiele: e^z , $\cos(z)$, $\sin(z)$ sind ganze Funktionen.

Wir untersuchen das Verhalten von ganzen Funktionen für $|z| \rightarrow \infty$. Als erstes betrachten wir Polynome.

Lemma 10.11. *Es sei*

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

ein Polynom. Dann gilt

1)

$$|p(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) |z|^n, \quad |z| \geq 1.$$

2) $\forall \epsilon (0 < \epsilon < 1) \exists \rho_\epsilon \geq 1 \forall |z| \geq \rho_\epsilon :$

$$(1 - \epsilon)|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n.$$

Beweis. (1) Für $|z| \geq 1$:

$$|p(z)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k||z|^k \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) |z|^n.$$

(2) Sei $\tilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Dann ist nach 1):

$$|\tilde{p}(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1}, \quad |z| \geq 1.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$ gegeben. Sei

$$\rho_\epsilon = \max \left(1, \frac{1}{\epsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right).$$

Für $|z| \geq \rho_\epsilon$ folgt

$$|\tilde{p}(z)| \leq \frac{1}{|z|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^n \leq \epsilon |a_n| |z|^n.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)|a_n||z|^n &\leq |a_n||z|^n - |\tilde{p}(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |\tilde{p}(z)| \\ &\leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n. \end{aligned}$$

□

Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 10.12. *Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es existiere $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$ und $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grade $\leq n$.*

Beweis. Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die Taylorentwicklung von f in 0. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus Korollar 10.2 folgt

$$|a_k| \leq r^{-k} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-k} M r^n, \quad |z| \geq R.$$

Für $r \rightarrow \infty$ folgt daraus $a_k = 0$ für $k > n$. Daher ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

□

Korollar 10.13. (Satz von Liouville)

Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und beschränkt. Dann ist f konstant.

Satz 10.14. (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante komplexe Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ hat mindestens eine Nullstelle.

1. *Beweis.* Wir nehmen an, dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Es sei $f(z) = 1/p(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Aus Lemma 10.11 folgt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)|a_n||z|^n}, \quad \text{für alle } |z| \geq \rho_\epsilon.$$

Daher ist $|f|$ beschränkt. Aus Korollar 10.13 folgt, dass f und daher p konstant ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

2. *Beweis.* Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$. Wir wählen in Lemma 10.11 $\epsilon = 1/2$ und $R \geq \max\{1, \rho_\epsilon\}$ so groß, dass

$$|p(0)| < \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

gilt. Dann ist

$$|p(0)| < \min_{|z|=R} |p(z)|.$$

Aus Satz 10.4 folgt, dass $p(z)$ eine Nullstelle in $D_R(0)$ hat. \square

Satz 10.15. (Faktorisierungssatz)

Jedes komplexe Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grade n ist eindeutig darstellbar als Produkt

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{m_i},$$

wobei $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind, $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ und $n = m_1 + \dots + m_r$.

Theorem 10.16. (Umkehrsatz)

Es sei G ein Gebiet, $G' \subset \mathbb{C}$, und $f: G \rightarrow G'$ eine bijektive holomorphe Funktion. Dann ist G' ein Gebiet und $f^{-1}: G' \rightarrow G$ ist holomorph.

Beweis. Aus Satz 10.5 folgt, dass G' ein Gebiet ist und f eine offene Abbildung. Damit ist f^{-1} stetig und f ein Homöomorphismus. Sei

$$M = \{z \in G : f'(z) = 0\}.$$

$M \subset G$ ist abgeschlossen und diskret, da f' holomorph und $f' \neq 0$. Da f ein Homöomorphismus ist, folgt, dass $M' = f(M)$ abgeschlossen und diskret in G' ist.

Nun ist $f: G \setminus M \rightarrow G' \setminus M'$ holomorph und $f'(z) \neq 0, \forall z \in G \setminus M$. Aus Satz 1.8 folgt, dass

$$f^{-1}: G' \setminus M' \rightarrow G \setminus M$$

holomorph und stetig auf G' ist. Aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt damit, dass $f^{-1}: G' \rightarrow G$ holomorph ist. Aus $f \circ f^{-1} = Id$ folgt $f' \cdot (f^{-1})' \equiv 1$. Daher ist $M = \emptyset = M'$. \square

Bemerkung: Der Beweis hat folgendes gezeigt. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

Satz 10.17. (Phragmen-Lindelöf)

Sei $\sigma_1 < \sigma_2$ und $S = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \operatorname{Re}(z) < \sigma_2\}$. Sei $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es existiere $0 < c < \frac{\pi}{\sigma_2 - \sigma_1}$ und $A > 0$, so dass

$$|f(z)| \leq A \exp(e^{c|\operatorname{Im}(z)|}),$$

für $z \in S$. Weiter existiere $C > 0$ mit

$$|f(z)| \leq C, \quad z \in \partial S.$$

Dann gilt $|f(z)| \leq C$ für $z \in S$.

Beweis. O.B.d.A sei $\sigma_1 = -\frac{1}{2}\pi, \sigma_2 = \frac{1}{2}\pi$. Dann ist $0 < c < 1$. Sei $c < b < 1, \epsilon > 0$ und

$$g(z) = f(z)e^{-\epsilon \cos(bz)}.$$

Sei $z = \sigma + it, \sigma, t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$|g(z)| = |f(z)| \exp(-2\epsilon \cos(b\sigma) \cosh(bt)) \leq |f(z)| \exp(-\epsilon \cos(\frac{b\pi}{2})e^{b|t|}) \leq |f(z)|$$

Daraus folgt $|g(z)| \leq C, z \in \partial S$, und

$$|g(z)| \leq A \exp(e^{c|t|} - \epsilon \cos(\frac{b\pi}{2})e^{b|t|})$$

für $z \in S$. Da $b > c$, existiert $T > 0$, sodass

$$|g(z)| \leq C$$

für $|\operatorname{Im}(z)| \geq T$. Mit dem Maximumprinzip folgt damit

$$|g(z)| \leq C, \quad z \in S.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |g(z)| \exp(2\epsilon \cos(b \operatorname{Re}(z)) \cosh(b \operatorname{Im}(z))) \\ &\leq C \exp(2\epsilon \cos(b \operatorname{Re}(z)) \cosh(b \operatorname{Im}(z))) \end{aligned}$$

für $z \in S, \epsilon > 0$. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $|f(z)| \leq C, z \in S$. □

Beispiel: Für die Riemannsche Zetafunktion gilt

$$|\zeta(1 + it)| \leq \log |t|, \quad |t| \geq 2.$$

Außerdem gilt die Identität

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1 - s),$$

mit

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s)} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}}}.$$

Die Stirlingsche Formel liefert

$$(\chi(s))^{-1} = O(t^{\sigma - \frac{1}{2}})$$

für $t \rightarrow \infty$, $-\infty \leq \alpha \leq \sigma \leq \beta < \infty$. Damit folgt

$$\overline{\zeta(it)} = \zeta(-it) = \frac{\zeta(1+it)}{\chi(1+it)} = O(t^{\frac{1}{2}} \log(t)),$$

Aus dem Satz von Phragmen-Lindelöf erhalten wir

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{2}} \log(t)).$$

Vermutung (Lindelöf): Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = O_\varepsilon(|t|^\varepsilon).$$

Diese Abschätzung folgt aus der Riemannschen Vermutung.

11. KONVERGENZSÄTZE

Satz 11.1. (*Weierstraßscher Konvergenzsatz*)

Es sei $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Folge $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

Beweis. 1) Da $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen ist, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, ist f stetig. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Da die f_n holomorph sind, folgt aus dem Lemma von Goursat:

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(\zeta) d\zeta = 0.$$

Aus dem Satz von Morera folgt, dass $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

2) Es sei $\overline{D_R(z_0)} \subset G$, $0 < r < R$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Aus Satz 10.1 folgt

$$\forall z \in \overline{D_r(z_0)}: |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq C \max_{\zeta \in \partial D_R(z_0)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.$$

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $\partial D_R(z_0)$ gegen f . Daraus folgt, dass $(f_n^{(k)})$ gleichmäßig auf $\overline{D_r(z_0)}$ gegen $f^{(k)}$ konvergiert. \square

Korollar 11.2. Es sei $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere lokal gleichmäßig. Dann gilt

- 1) $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, $z \in G$, ist eine holomorphe Funktion.
- 2) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist

$$\|f\|_U := \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt lokal normal konvergent, wenn jeder Punkt $z \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ besitzt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty.$$

Satz 11.3. *Es sei $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sei lokal normal konvergent. Dann ist $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ normal gegen $f^{(k)}$.*

Beweis. Es sei $z_0 \in G$. Dann existiert $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset G$. Aus Korollar 10.3 folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$ existiert so, dass für alle holomorphen Funktionen $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$|g^{(k)}(z)| \leq C_k \max_{\zeta \in \partial D_r(z_0)} |g(\zeta)|$$

für alle $z \in D_{r/2}(z_0)$. Daraus folgt

$$\|g^{(k)}\|_{D_{r/2}(z_0)} \leq C_k \|g\|_{D_r(z_0)}.$$

Daraus folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n^{(k)}\|_{D_{r/2}(z_0)} \leq C_k \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{D_r(z_0)} < \infty.$$

Daher sind alle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ normal konvergent. Daraus folgt, dass $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig konvergiert (siehe Bemerkung). Aus Satz 11.1 folgt, dass f holomorph ist und es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G.$$

□

Bemerkungen:

1) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ lokal normal konvergent. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ lokal gleichmäßig konvergent. Dies sieht man wie folgt. Sei $x \in U \subset G$ offen und $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| < \infty$ für $z \in U$. Also konvergiert $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Weiter ist

$$\|f - \sum_{n=0}^N f_n\|_U \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_U < \epsilon.$$

2) Die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert lokal gleichmäßig, aber nicht normal.

Satz 11.4. *(Umordnungssatz)*

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere normal in G gegen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}$ normal gegen f in G .

Beweis. Sei $x \in G$ und $U \subset G$ eine offene Umgebung von x , so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_U < \infty.$$

Aus dem Umordnungsatz für Reihen komplexer Zahlen folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{\tau(n)}\|_U < \infty,$$

für alle $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Daher gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}(z),$$

konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}$ konvergiert normal gegen f . □

Beispiele: 1) *Die Gammafunktion*

Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(s) = \int_{1/n}^n t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Dann ist $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter ist

$$|f_n(s) - \Gamma(s)| \leq \int_0^{1/n} t^{\operatorname{Re}(s)-1} e^{-t} dt + \int_n^{\infty} t^{\operatorname{Re}(s)-1} e^{-t} dt.$$

Es sei $\epsilon > 0$. Aus dieser Ungleichung folgt, dass für alle kompakten Teilmengen K der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(s) - \Gamma(s)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und } s \in K.$$

Aus Satz 11.1 folgt, dass $\Gamma(s)$ in $\operatorname{Re}(s) > 0$ holomorph ist. Wie wir wissen, gilt die **Funktionalgleichung**

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Daraus folgt für $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+k)(s+k-1)\cdots s}.$$

Daraus erhalten wir die analytische Fortsetzung von Γ zu einer holomorphen Funktion

$$\Gamma: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}.$$

2) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Es sei

$$\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

der Laplaceoperator. Wir betrachten Δ als Operator in $L^2(\Omega)$ mit Definitionsbereich $C_c^\infty(\Omega)$

$$\Delta: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

Aus der Greenschen Formel folgt, dass Δ ein symmetrischer linearer Operator im Hilbertraum $L^2(\Omega)$ ist, das heißt

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle, \quad f, g \in C_c^\infty(\Omega).$$

Außerdem gilt

$$\langle \Delta \varphi, \varphi \rangle = \|\nabla \varphi\|^2 > 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Daher ist Δ ein positiv definiten Operator. Es sei Δ_D die Abschließung von Δ in $L^2(\Omega)$. Dann existiert eine orthonormale Basis $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$, die aus Eigenfunktionen von Δ_D besteht, das heißt es ist $\varphi_i \in C^\infty(\Omega)$ und es existiert $\lambda_i > 0$, so dass

$$\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i, \quad \varphi_i|_{\partial\Omega} = 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Die λ_i sind die Eigenwerte von Δ_D , die wir wachsend ordnen

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

Für $\lambda > 0$ sei

$$N_\Omega(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leq \lambda\}$$

die Zählfunktion der Eigenwerte. Die Weylsche Formel beschreibt das asymptotische Verhalten von $N_\Omega(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \infty$.

Theorem 11.5. (*Weylsches Gesetz*)

$$N_\Omega(\lambda) \sim \frac{\text{vol}(\Omega)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(n/2 + 1)} \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Es sei

$$\zeta(s, \Delta_D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-s}.$$

Aus Theorem 11.5 folgt, dass diese Reihe gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\text{Re}(s) > n/2$ konvergiert. Aus Satz 11.1 folgt, dass $\zeta(s, \Delta_D)$ eine holomorphe Funktion in $\text{Re}(s) > n/2$ ist. Aus der Theorie der Wärmeleitungsgleichung erhält man folgenden Satz.

Satz 11.6. *Für $t \rightarrow +0$ hat die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}$, $t > 0$, eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \sim t^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{2}}.$$

Daraus folgt wie im Falle der Riemannschen Zetafunktion, dass $\zeta(s, \Delta_D)$ eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{(n-k)/2 : k \in \mathbb{N}_0\}$ besitzt, die in $s = 0$ holomorph ist.

Wir definieren die **regularisierte Determinante** von Δ_D durch

$$\det \Delta_D = \exp \left(-\frac{d}{ds} \zeta(s, \Delta_D) \Big|_{s=0} \right).$$

Die regularisierte Determinante spielt zum Beispiel in der geometrischen Analysis und der Quantenfeldtheorie eine wichtige Rolle.

12. LAURENTREIHEN

Wir untersuchen Funktionen, die holomorph in einem Kreisring sind.

Definition 12.1. Eine **Laurentreihe** um $a \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k.$$

$$L_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-a)^{-k}$$

heißt **Hauptteil** und

$$L_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$$

heißt **Nebenteil** der Laurentreihe. Die Laurentreihe $L(z)$ heißt konvergent in z_1 , wenn $L_1(z)$ und $L_2(z)$ in z_1 konvergieren. Dann setzen wir

$$L(z_1) := L_1(z_1) + L_2(z_1).$$

$L(z)$ heißt gleichmäßig oder lokal gleichmäßig konvergent, wenn dies für $L_1(z)$ und $L_2(z)$ gilt.

Sei ρ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ und R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \begin{cases} \text{konvergiert für} & r = 1/\rho < |z-a| < R \\ \text{divergiert für} & |z-a| < r \text{ oder } |z-a| > R. \end{cases}$$

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiert normal auf kompakten Teilmengen von

$$K_a(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Sei $r < |z-a| < R$. Die Reihe

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n, \quad |w| < \rho = 1/r,$$

ist konvergent, also ist $g: D_{1/r}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es ist

$$L_1(z) := g((z-a)^{-1}).$$

Daraus folgt, dass $L_1: \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a)} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . Wir sagen, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen unendlich konvergiert, was wir mit $z_n \rightarrow \infty$ bezeichnen, wenn gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |z_n| \geq N.$$

Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |L_1(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| g\left(\frac{1}{z-a}\right) \right| = \lim_{w \rightarrow 0} |g(w)| = 0.$$

Die Reihe

$$L_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

konvergiert für $|z-a| < R$. Daher ist $L_2: D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Satz 12.2. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergent für $r < |z-a| < R$. Dann existieren holomorphe Funktionen $L_1: \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a)} \rightarrow \mathbb{C}$ und $L_2: D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$L_1(z) + L_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad r < |z-a| < R,$$

und $\lim_{z \rightarrow \infty} |L_1(z)| = 0$. Diese Darstellung ist eindeutig.

Beweis. Wir müssen nur noch die Eindeutigkeit beweisen. Es seien

$$f_1, g_1: \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_2, g_2: D_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph. Es gelte

$$(12.8) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |f_1(z)| = 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} |g_1(z)|$$

und

$$f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z), \quad r < |z-a| < R.$$

Dann ist

$$(12.9) \quad f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z), \quad r < |z-a| < R.$$

Wir definieren die Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

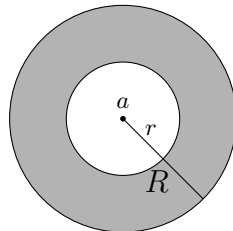
$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & z \in \mathbb{C} \setminus D_r(a); \\ g_2(z) - f_2(z), & z \in D_R(a). \end{cases}$$

Wegen (12.9) ist h eindeutig definiert. Weiter ist h holomorph und auf Grund von (12.8) ist $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = 0$. Aus dem Satz von Liouville folgt $h \equiv 0$. Damit ist $f_1 = g_1, f_2 = g_2$. \square

Holomorphe Funktionen in Kreisringen

Für $0 \leq r < R \leq \infty, a \in \mathbb{C}$, sei

$$K_a(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}.$$



Satz 12.3. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{K_a(r, R)} \subset U$. Dann gilt für alle $z \in K_a(r, R)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Beweis. Sei $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}; & \zeta \neq z; \\ f'(z); & \zeta = z. \end{cases}$$

Dann gilt:

- 1) ϕ holomorph in $U \setminus \{z\}$,
- 2) ϕ stetig in z .

Aus dem Riemannscher Hebbbarkeitssatz folgt, dass $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Für $r \leq \rho \leq R$ sei $\gamma_\rho: [0, 2\pi] \rightarrow U$ definiert durch

$$\gamma_\rho(\theta) = a + \rho e^{i\theta}.$$

Dann sind γ_r und γ_R frei homotop durch γ_ρ . Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\int_{|\zeta-a|=r} \phi(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta-a|=R} \phi(\zeta) d\zeta.$$

Sei $\rho = r$ oder $\rho = R$. Dann ist

$$(12.10) \quad \int_{|\zeta-a|=\rho} \phi(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta$$

und

$$(12.11) \quad \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & \rho = R; \\ 0, & \rho = r. \end{cases}$$

Der Fall $\rho = r$ folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, da γ_r in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ nullhomotop ist. Zusammen mit (12.10) und (12.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R} \phi(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \phi(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \end{aligned}$$

□

Satz 12.4. (Laurententwicklung)

Es sei $f: K_a(r, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann f in $K_a(r, R)$ in eine konvergente Laurentreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Die erste Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(a)}$ gegen den Hauptteil und die zweite Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $D_R(a)$ gegen den Nebenteil von f . Die Koeffizienten a_n sind eindeutig bestimmt. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \rho < R$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis. Sei $r < r' < \rho < R' < R$. Dann ist $\overline{K_a(r', R')} \subset K_a(r, R)$. Aus Satz 12.3 folgt

$$(12.12) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \frac{1}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n, \quad |z-a| < R', |\zeta-a| = R'$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n, \quad |\zeta-a| = r', |z-a| > r'.$$

Durch Einsetzen in (12.12) erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=r'} f(\zeta) (\zeta-a)^n d\zeta (z-a)^{-n-1}.$$

Wir können bei den Integralen r' und R' durch jedes ρ mit $r' \leq \rho \leq R'$ ersetzen. Dann ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad r' < |z-a| < R',$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.$$

Dies gilt für alle $r < r' < R' < R$. Daher für $r < |z-a| < R$ und $r < \rho < R$. □

Beispiel: Sei $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Es gilt:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

Daher ist

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n, \quad z \in K_0(1, 2).$$

13. ISOLIERTE SINGULARITÄTEN

Definition 13.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität** von f . $U \setminus \{z_0\}$ heißt **punktierte Umgebung** von z_0 .

Beispiele:

- 1) Sei $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist 0 eine isolierte Singularität.
- 2) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$ hat die isolierten Singularitäten 0 und i .
- 3) $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
- 4) $f(z) = \cot \pi z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, hat in jedem $n \in \mathbb{Z}$ eine isolierte Singularität.

Wir unterscheiden isolierte Singularitäten nach dem Verhalten von f in der Nähe der Singularität.

Definition 13.2. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- 1) Es existiert eine offene Umgebung V von z_0 in U so, dass $f|_{V \setminus \{z_0\}}$ beschränkt ist. Dann heißt z_0 **hebbare Singularität**.
- 2) Es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Dann heißt z_0 **Pol** von f .
- 3) z_0 ist weder eine hebbare Singularität noch ein Pol. Dann heißt z_0 **wesentliche Singularität** von f .

Bemerkungen: Wenn z_0 eine hebbare Singularität von $f: U \setminus \{z_0\}$ ist, so hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitsatz eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Satz 13.3. Sei $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist z_0 ein Pol von f genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{N}$, eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ existieren mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z), \quad z \in V.$$

Beweis. \Leftarrow) Es sei $\epsilon > 0$ so, dass

$$|g(z) - g(z_0)| < \frac{|g(z_0)|}{2}$$

für $|z - z_0| < \epsilon$. Dann ist

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|g(z_0)|, \quad |z - z_0| < \epsilon.$$

Hieraus folgt für $|z - z_0| < \epsilon$:

$$|f(z)| = |z - z_0|^{-n} |g(z)| > \frac{|g(z_0)|}{2} |z - z_0|^{-n},$$

und daher $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

\Rightarrow) Da $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ist, existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$. Sei $h(z) = 1/f(z)$, $z \in V \setminus \{z_0\}$. Dann ist $h: V \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\lim_{z \rightarrow z_0} |h(z)| = 0$.

Nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz kann h durch 0 zu einer holomorphen Funktion $\tilde{h}: V \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Daher existieren $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $H: V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H(z_0) \neq 0$ und

$$\tilde{h}(z) = (z - z_0)^n H(z).$$

Sei $\epsilon > 0$ so, dass $H(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < \epsilon$. Sei $g(z) = 1/H(z)$ für $z \in B_\epsilon(z_0)$. Dann ist $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z).$$

□

Definition 13.4. Sei n wie in Satz 13.3. n heißt **Ordnung** des Poles z_0 .

Satz 13.5. Eine isolierte Singularität z_0 von $f: U \setminus \{z_0\}$ ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn für alle $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_k) in $U \setminus \{z_0\}$ existiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = w_0$.

Beweis. \Leftarrow) z_0 ist kein Pol, da es Folgen (z_k) gibt, für die $f(z_k)$ einen endlichen Limes hat. z_0 ist nicht hebbbar, da der Grenzwert nicht eindeutig ist.

\Rightarrow) Sei $w \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass $r > 0$ und $\epsilon > 0$ existieren mit

$$|f(z) - w| \geq \epsilon \text{ für alle } 0 < |z - z_0| < r.$$

Sei

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Dann ist $g: D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter ist

$$|g(z)| \leq |f(z) - w|^{-1} \leq \epsilon^{-1},$$

das heißt, g hat eine hebbare Singularität in z_0 . Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Sei $\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| \neq 0$. Dann ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} + w = \frac{1}{g(z_0)} + w$$

und daher hat f eine hebbare Singularität in z_0 .

b) Sei $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$. Dann ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{1}{g(z)} + w \right| = \infty,$$

das heißt, z_0 ist ein Pol von f .

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass z_0 eine wesentliche Singularität ist. □

Den Typ der Singularität kann man mit Hilfe der Laurententwicklung bestimmen.

Satz 13.6. *Es sei $f: D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph und*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f in z_0 . Dann gilt:

- 1) z_0 ist hebbare Singularität von f genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.
- 2) z_0 ist Pol genau dann, wenn eine $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$.
- 3) z_0 ist wesentliche Singularität, genau dann, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.

Beweis: Übung!

Meromorphe Funktionen

Definition 13.7. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ eine diskrete Teilmenge und $f: U \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wenn alle $z_0 \in P$ Pole von f sind, so heißt f eine **meromorphe Funktion** auf U .*

Seien f, g meromorphe Funktionen auf U sowie $P_f, P_g \subset U$ die Pole von f bzw. g . Sei

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad z \in U \setminus \{P_f \cup P_g\},$$

dann ist $f + g$ meromorph auf U . Dies gilt ebenso für $f \cdot g$. Wenn $g \not\equiv 0$ ist, so ist $\frac{1}{g}$ meromorph.

Satz 13.8. *f ist meromorph auf U genau dann, wenn für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und holomorphe Funktionen $g, h: V \rightarrow \mathbb{C}$ existieren so, dass*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in V.$$

Beweis. \Leftarrow) Sei $V \subset \mathbb{C}$ offen und seien $g, h: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in V$. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}_0$ und holomorphe Funktionen $\tilde{g}, \tilde{h}: V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{g}(z_0) \neq 0, \tilde{h}(z_0) \neq 0$, und

$$g(z) = (z - z_0)^m \tilde{g}(z), \quad h(z) = (z - z_0)^n \tilde{h}(z).$$

Sei $f(z) = g(z)/h(z)$ und $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)/\tilde{h}(z)$. Sei $r > 0$ so, daß $\tilde{h}(z) \neq 0$ für alle $z \in D_r(z_0)$. Dann ist $\tilde{f}: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und

$$f(z) = (z - z_0)^{m-n} \tilde{f}(z), \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Daher hat f höchstens einen Pol in z_0 .

\Rightarrow) Wenn z_0 kein Pol von f ist, dann setzen wir $g = f$ und $h \equiv 1$. Sei z_0 Pol der Ordnung n von f . Nach Satz 13.3 existieren eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad z \in U.$$

Dann setzen wir $h(z) = (z - z_0)^n$. □

Definition 13.9. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sei $\mathcal{M}(G)$ die Menge der in G meromorphen Funktionen.

Satz 13.10. $\mathcal{M}(G)$ ist ein Körper.

Beweis: Übung!

Riemannsche Zahlenkugel

Es sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es sei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die 2-dimensionale Einheitskugel und

$$\sigma: S^2 \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{C}}$$

die stereographische Projektion. Dadurch kann man die Topologie von \mathbb{C} zu einer Topologie von $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen.

Definition 13.11. Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ heißt offen, wenn entweder $U \subset \mathbb{C}$ und U offen in \mathbb{C} ist oder wenn $\infty \in U$ und $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt in \mathbb{C} ist.

Es sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gilt:

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : |z_n| \geq N \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Sei f meromorph auf U und sei $a \in U$ ein Pol von f . Dann setzen wir

$$f(a) := \infty.$$

Damit erhalten wir eine Abbildung $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Satz 13.12. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Dann ist f eine meromorphe Funktion auf U genau dann, wenn

- 1) f stetig,
- 2) $f^{-1}(\infty)$ diskret in U ,
- 3) $f: U \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beweis: Übung.

14. DER ALLGEMEINE CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ

Als Vorbereitung beschäftigen wir uns noch einmal mit dem Logarithmus.

Seien $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z \in G.$$

Dann heißt g holomorpher Logarithmus von f . Falls f einen holomorphen Logarithmus besitzt, so gilt $f(z) \neq 0$ für $z \in G$.

Lemma 14.1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Sei $a \in G$ und $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow G$ ein Integrationsweg mit $\gamma_z(0) = a$ und $\gamma_z(1) = z$. Sei weiterhin $b \in \mathbb{C}$ so, dass $e^b = f(a)$ gilt. Sei

$$g(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta + b.$$

Dann ist $e^g = f$.

Beweis. Da G ein konvexes Gebiet ist, ist das Integral unabhängig vom Integrationsweg. Es gilt $f'g' = f'$. Daraus folgt $(fe^{-g})' = 0$. Daher existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, so dass $f = ce^g$. Nun benutzt man, dass $e^{g(a)} = e^b = f(a)$ ist. Daraus folgt $c = 1$. \square

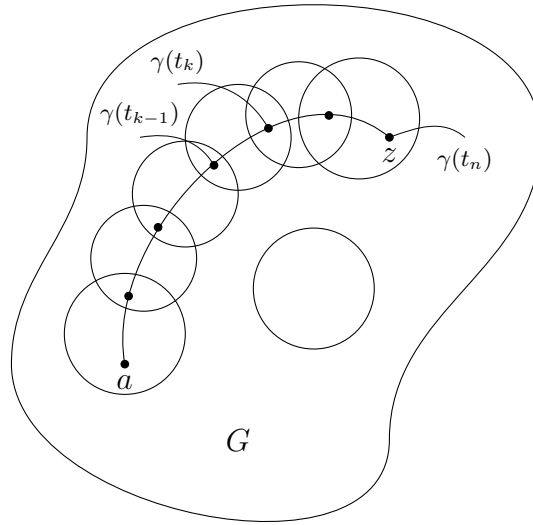
Mit diesem Lemma folgt, dass

$$f(z) = f(a) \exp \left(\int_{\gamma_z} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta \right).$$

Satz 14.2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Sei $a, z \in G$. Für alle Integrationswege $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma(0) = a, \gamma(1) = z$ gilt:

$$f(z) = f(a) \exp \left(\int_{\gamma_z} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta \right).$$

Beweis. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ ein Integrationsweg mit $\gamma(0) = a, \gamma(1) = z$. Wir wählen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $D_i = D_{r_i}(z_i) \subset G$, so dass für $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ gilt, dass $\text{Sp}(\gamma_k) \subset D_k, k = 1, \dots, n$.



Aus Lemma 14.1 folgt damit

$$\exp \left(\int_{\gamma_k} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta \right) = \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Daraus folgt

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta \right) = \prod_{k=1}^n \exp \left(\int_{\gamma_k} \frac{f'}{f}(\zeta) d\zeta \right) = \prod_{k=1}^n \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))} = \frac{f(z)}{f(a)}.$$

\square

Korollar 14.3. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph und $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Aus Satz 14.2 folgt, dass

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right) = 1.$$

□

Definition 14.4. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ ein geschlossener Integrationsweg. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$ sei

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

$n(\gamma, z)$ heißt **Umlaufzahl** (oder **Windungszahl**) von γ um z .

Beispiel: Sei $\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_n(\theta) = re^{in\theta}, \quad n > 0.$$

γ_n umläuft jeden Punkt $z \in D_r(0)$ n -mal in positiver Richtung. Um das Integral zu berechnen, betrachten wir die geschlossene Kurve $\gamma_{z,n}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$\gamma_{z,n}(\theta) = z + re^{i\theta}.$$

Dann sind γ_n und $\gamma_{z,n}$ frei homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ und wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z,n}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi in\theta} (2\pi in) \cdot e^{2\pi in\theta} d\theta = n.$$

Satz 14.5. Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in \mathbb{C} . Dann gilt:

- 1) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma) : n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.
- 2) $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma) \ni z \mapsto n(\gamma, z)$ ist lokal konstant.
- 3) Sei $\tilde{\gamma}$ ein geschlossener Integrationsweg in \mathbb{C} mit $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$. Dann ist

$$n(\gamma + \tilde{\gamma}, z) = n(\gamma, z) + n(\tilde{\gamma}, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma + \tilde{\gamma}).$$

Inbesondere gilt $n(-\gamma, z) = -n(\gamma, z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma)$.

Beweis. 1) folgt aus Korollar 14.3 mit $f(\zeta) = \zeta - z$. 2) folgt, da $n(\gamma, z)$ stetig in z ist (Übung) und nur Werte in \mathbb{Z} annimmt. 3) folgt aus der Definition und der entsprechenden Eigenschaft der Integrale. □

Definition 14.6. Sei

$$\text{Int}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma) : n(\gamma, z) \neq 0\},$$

$$\text{Ext}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(\gamma) : n(\gamma, z) = 0\}.$$

Dann heißt $\text{Int}(\gamma)$ das **Innere von** γ , und $\text{Ext}(\gamma)$ das **Äußere von** γ .

Es ist

$$\mathbb{C} = \text{Int}(\gamma) \dot{\cup} \text{Sp}(\gamma) \dot{\cup} \text{Ext}(\gamma).$$

Sowohl $\text{Int}(\gamma)$ als auch $\text{Ext}(\gamma)$ sind offen in \mathbb{C} , da $n(\gamma, z)$ stetig und lokal konstant ist.

$$\partial\text{Int}(\gamma) \subset \text{Sp}(\gamma), \quad \partial\text{Ext}(\gamma) \subset \text{Sp}(\gamma).$$

Beispiel: Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(\phi) = e^{2\pi i \phi}$. Dann ist $\text{Int}(\gamma) = D_r(0)$ und $\text{Ext}(\gamma) = \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(0)}$.

Lemma 14.7. *Int(γ) ist beschränkt, Ext(γ) $\neq \emptyset$ und ist unbeschränkt.*

Beweis. $\text{Sp}(\gamma) \subset D_r(0)$ ist kompakt. Daher existiert $r > 0$ mit $\text{Sp}(\gamma) \subset D_r(0)$. Sei $V = \mathbb{C} \setminus D_r(0)$. Da V zusammenhängend ist, existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $n(\gamma, z) = k$ für alle $z \in V$. Da

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \quad z \in V,$$

folgt $k = 0$. Daher ist $V \subset \text{Ext}(\gamma)$ und $\text{Int}(\gamma) \subset D_r(0)$. □

Zyklen

Definition 14.8. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien $\gamma_1, \dots, \gamma_r: [0, 1] \rightarrow G$ geschlossene Integrationswege sowie $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$. Dann heißt*

$$\Gamma := \sum_{i=1}^r n_i \gamma_i$$

Zyklus in G .

Wir setzen

- $\text{Sp}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sp}(\gamma_i)$,
- $\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^r n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz$,
- $n(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^r n_i n(\gamma_i, z)$,
- $L(\Gamma) = \sum_{i=1}^r |n_i| L(\gamma_i)$.

Zyklen können auf folgende Weise addiert werden:

$$\sum_{i=1}^r m_i \gamma_i + \sum_{i=1}^r n_i \gamma_i = \sum_{i=1}^r (m_i + n_i) \gamma_i,$$

und bilden so eine abelsche Gruppe. Dabei ist zu beachten, dass einige der Koeffizienten n_i bzw m_j gleich Null sein können.

Beispiel: Sei $0 < r < R, a \in \mathbb{C}$,

$$\gamma_{\rho}(\theta) := a + \rho e^{2\pi i \theta}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Sei $\Gamma = \gamma_R - \gamma_r$. Dann ist

$$K_a(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) = 1\}.$$

Definition 14.9. Sei Γ ein Zyklus in G . Dann heißt Γ **nullhomolog**, wenn gilt:

$$\forall z \notin G : n(\Gamma, z) = 0.$$

Zwei Zyklen Γ_1, Γ_2 heißen **homolog**, wenn $\Gamma_1 - \Gamma_2$ nullhomolog sind. Man schreibt dann $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Wir kommen nun zum allgemeinen Cauchyschen Integralsatz und der allgemeinen Cauchyschen Integralformel.

Theorem 14.10. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und Γ ein Zyklus in G mit $\Gamma \sim 0$. Dann gilt

1)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

2) Für alle $z \notin \text{Sp}(\Gamma)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

(Man beachte dabei, dass für $z \notin G$ das Integral gleich Null ist).

Beweis. Wir beweisen zuerst 2). Es genügt, $k = 0$ zu betrachten. Wir führen eine Hilfsfunktion $g(\zeta, z)$ ein, die definiert ist durch

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Dann ist 2) äquivalent zu

$$\int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta = 0, \quad z \in G \setminus \text{Sp}(\Gamma).$$

Sei

$$(14.13) \quad h_0(z) = \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta, \quad z \in G \setminus \text{Sp}(\Gamma).$$

Zu zeigen: $h_0 \equiv 0$.

Wir beweisen dies in zwei Schritten:

- (a) h_0 kann zu einer holomorphen Funktion $h_0: G \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.
- (b) Es existiert $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $h|_G = h_0$ und $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$.

Mit dem Satz von Liouville folgt, dass $h \equiv 0$ und damit auch $h_0 \equiv 0$ gilt.

Beweis von (a): Wir zeigen zuerst, dass $g: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Für $\zeta \neq z$ ist das klar. Wir betrachten

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)$$

in einer Umgebung $D_{\delta}(z_0) \times D_{\delta}(z_0)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

i) $\zeta = z$. Dann ist

$$g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0).$$

ii) $\zeta \neq z$. Dann ist

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z, \zeta]} (f'(w) - f'(z_0)) dw.$$

Da f' stetig ist existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall w \in D_\delta(z_0) : |f'(w) - f'(z_0)| < \epsilon.$$

Im Fall i) folgt

$$|g(z, z) - g(z_0, z_0)| < \epsilon$$

und im Fall ii)

$$|g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)| \leq \frac{1}{|\zeta - z|} \cdot |\zeta - z| \cdot \epsilon = \epsilon.$$

Also ist g stetig. Damit ist h_0 durch das Integral (14.13) für alle $z \in G$ definiert und $h_0: G \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig. Wir zeigen jetzt, dass h_0 holomorph ist. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z) dz = \int_{\partial\Delta} \int_{\Gamma} g(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\Gamma} \int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz d\zeta.$$

Für jedes feste $\zeta \in G$ ist $z \mapsto g(\zeta, z)$ holomorph in $G \setminus \{\zeta\}$ und stetig in ζ . Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist diese Abbildung holomorph. Mit dem Lemma von Goursat folgt:

$$\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz = 0.$$

Daher ist

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z) dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist h_0 also holomorph.

Beweis von (b): Jetzt kommt die Voraussetzung $\Gamma \sim 0$ ins Spiel. Aus $\Gamma \sim 0$ folgt, dass $\text{Int}(\Gamma) \subset G$. Da $\text{Int}(\Gamma) \cup \Gamma$ kompakt ist und $\text{Int}(\Gamma) \cup \Gamma \subset G$, folgt

$$G \cap \text{Ext}(\Gamma) \neq \emptyset.$$

Für $z \in \text{Ext}(\Gamma) \cap G$ ist

$$h_0(z) = \int_{\Gamma} g(\zeta, z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - n(\gamma, z) f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

da $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in \text{Ext}(\gamma)$. Sei

$$h_1(z) := \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \text{Ext}(\gamma).$$

Dann ist h_1 holomorph und

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h_1(z) = 0.$$

Weiter ist $h_1(z) = h_0(z)$ für $z \in \text{Ext}(\gamma) \cap G$. Es sei

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z), & z \in G, \\ h_1(z), & z \in \text{Ext}(\gamma). \end{cases}$$

Dann ist $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} h_1(z) = 0.$$

Damit haben wir die gewünschte Funktion h gefunden und es folgt $h_0 \equiv 0$, was 2) beweist.

Wir zeigen jetzt die Behauptung 1) des Theorems. Sei $a \in G \setminus \text{Sp}(\gamma)$. Wir definieren $F: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch $F(z) = (z - a)f(z)$. Dann ist F holomorph und es gilt $F(a) = 0$. Mithilfe von 2) folgt damit:

$$0 = n(\Gamma, a)F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

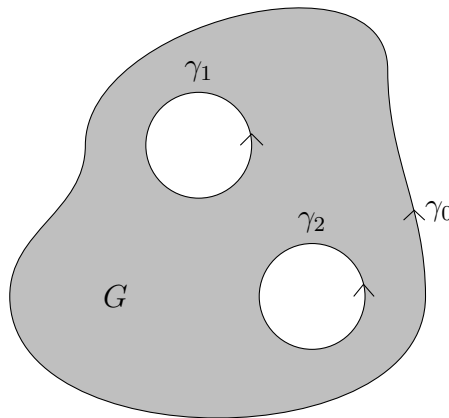
□

Definition 14.11. Sei γ ein geschlossener Integrationsweg. γ heißt **einfach geschlossen**, wenn $\text{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ und $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in \text{Int}(\gamma)$ ist.

Definition 14.12. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. G heißt **positiv berandet**, wenn einfach geschlossene Integrationswege $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ existieren mit

- 1) $\text{Sp}(\gamma_i) \cap \text{Sp}(\gamma_j) = \emptyset, i \neq j,$
- 2) $\partial G = \dot{\cup}_{i=0}^n \text{Sp}(\gamma_i),$
- 3) Sei $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$. Dann ist

$$G = \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) = 1\}, \text{ und } \mathbb{C} \setminus \overline{G} = \{z \in \mathbb{C} : n(\Gamma, z) = 0\}.$$



Theorem 14.13. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein positiv berandetes Gebiet und $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{G} \subset U$. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt:

1)

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0.$$

2) Für alle $z \in G$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Beweis. Wir können U als zusammenhängend annehmen. Dann ist $n(\partial G, z) = 0$ für $z \notin U$. Also ist $\partial G \sim 0$ in U . Aus Theorem 14.10 folgt 1). Da $n(\partial G, z) = 1$ für $z \in G$ folgt 2). \square

15. DER RESIDUENSATZ

Definition 15.1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $S \subset G$ eine diskrete Teilmenge und $f: G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{D_r(z_0)} \subset G$ und $S \cap \overline{D_r(z_0)}$ höchstens z_0 enthält. Das **Residuum** von f in z_0 ist die Zahl

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} f(z) dz.$$

Der Radius $r > 0$ kann mit den obigen Einschränkungen beliebig gewählt werden. Seien nun die Punkte von S die isolierten Singularitäten von f . Sei $z_0 \in S$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f in z_0 . Dann ist für $r > 0$ hinreichend klein

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = a_{-1}.$$

Das heißt, es gilt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = a_{-1}.$$

Beispiel: Sei $r > 0$. Dann ist

$$\int_{|z|=r} e^{1/z} = 2\pi i.$$

Theorem 15.2 (Residuensatz). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $S \subset G$ diskret und $f: G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\Gamma \cap S = \emptyset$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{z \in S} n(\Gamma, z) \operatorname{res}_z f.$$

Beweis. Da $\operatorname{Int}(\gamma)$ beschränkt ist (siehe Lemma 14.7), existiert ein $r > 0$, so dass $\operatorname{Int}(\Gamma) \subset D_r(0)$. Da S diskret ist folgt

$$\#S \cap \overline{D_r(0)} < \infty$$

Daher ist

$$\#\{z \in S : n(\Gamma, z) \neq 0\} < \infty.$$

Sei

$$\{z_1, \dots, z_r\} = \{z \in S : n(\Gamma, z) \neq 0\} \quad \text{und} \quad S' = S \setminus \{z_1, \dots, z_r\}.$$

Für alle $z \in S'$ ist dann $n(\Gamma, z) = 0$. Daher ist Γ auch nullhomolog in $G \setminus S'$. Sei

$$h_k(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^k (z - z_k)^n$$

der Hauptteil der Laurentreihe von f in z_k . Dann ist

$$h_k(z): \mathbb{C} \setminus \{z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph und

$$F(z) = f(z) - \sum_{i=1}^r h_k(z)$$

ist holomorph auf $G \setminus S'$, das heißt, $F(z)$ kann in z_1, \dots, z_r holomorph fortgesetzt werden. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt damit

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 0,$$

das heißt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \int_{\Gamma} h_k(z).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} h_k(z) dz &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^k \int_{\Gamma} (z - z_k)^n dz = a_{-1}^k \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_k} dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, z_k) a_{-1}^k \\ &= 2\pi i \cdot n(\gamma, z_k) \operatorname{res}_{z_k} f. \end{aligned}$$

□

Korollar 15.3. Sei G ein positiv berandetes Gebiet und $\Gamma = \partial G$. Sei $U \supset \bar{G}$ eine Umgebung, $S \subset U$ diskret mit $S \cap \partial G = \emptyset$ und sei $f: U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{z \in S} n(\Gamma, z) \operatorname{res}_z f.$$

Berechnung von Residuen

Um diese Formel anwenden zu können, muss man die Residuen berechnen können. Es gelten folgende

Regeln:

- (1) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Dann ist $\operatorname{res}_z (af + bg) = a \operatorname{res}_z f + b \operatorname{res}_z g$. Sei z_0 ein einfacher Pol von f . Dann ist

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ist g holomorph in z_0 , so ist

$$\operatorname{res}_{z_0} (gf) = g(z_0) \operatorname{res}_{z_0} f.$$

(2) Sei z_0 ein Pol von f der Ordnung $n \geq 2$. Dann ist

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

(3) Seien $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, z_0 eine einfache Nullstelle von f . Dann ist

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g}{f} = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Beispiel: Sei

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}.$$

Wir sehen daraus, dass f einfache Pole in i und $-i$ hat. Es gilt

$$\operatorname{res}_i(f) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{res}_{-i}(f) = \frac{-i}{2(-i)} = \frac{1}{2}$$

Anwendung auf die Berechnung reeller Integrale

Wir betrachten Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Dazu machen wir folgende

Annahme: Sei

$$\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

die abgeschlossene obere Halbebene. Sei $\overline{\mathbb{H}} \subset U \subset \mathbb{C}$ offen und es gelte:

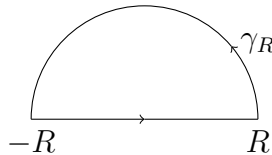
Es existieren $S \subset U$ mit $|S| < \infty$, $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f}: U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = f$. f nennt man **zulässig**.

Grundidee:

1) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Es sei $\gamma_R: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve, die definiert ist durch $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$. Die Komposition der Strecke $[-R, R]$ und γ_R ergibt eine einfach geschlossene Kurve:



Sei R so gewählt, dass $|z| < R$ für alle $z \in S$. Dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in S} \operatorname{res}_z \tilde{f} - \int_{\gamma_R} \tilde{f}(z) dz.$$

Sei $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \tilde{f}(z) dz = 0$. Dies gilt zum Beispiel, wenn

$$|\tilde{f}(z)| \leq C \frac{1}{|z|^2}, \quad |z| \geq 1.$$

Dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in S} \operatorname{res}_z \tilde{f}.$$

Beispiele:

1) Als erstes betrachten wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Bekanntlich ist $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \pi.$$

Wir prüfen jetzt dieses Ergebnis mit der obigen Methode nach. Es ist

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

die Fortsetzung von $\frac{1}{1+x^2}$. Weiter ist

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}.$$

Damit ist i der einzige Pol von \tilde{f} in \mathbb{H} . Damit ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i \left(\frac{1}{1+z^2} \right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

2) Als nächstes betrachten wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Dann ist

$$\tilde{f}(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

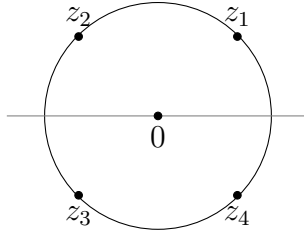
die Fortsetzung von $\frac{x^2}{1+x^4}$. Es gilt

$$z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

mit $z_i^4 + 1 = 0$. Die Wurzeln sind

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad z_2 = e^{i\pi 3/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

$$z_3 = -z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i), \quad z_4 = -z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$



Die Pole, die in \mathbb{H} liegen, sind z_1 und z_2 . Mit Hilfe der oben genannten Regeln zur Berechnung der Residuen erhalten wir

$$\operatorname{res}_{z_1} \tilde{f} = \frac{z_1^2}{2z_1(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)} = \frac{z_1}{2(z_1^2 - z_2^2)},$$

$$\operatorname{res}_{z_2} \tilde{f} = \frac{z_2^2}{2z_2(z_2 - z_1)(z_2 + z_1)} = \frac{z_2}{2(z_2^2 - z_1^2)}.$$

und es folgt

$$\operatorname{res}_{z_1} \tilde{f} + \operatorname{res}_{z_2} \tilde{f} = \frac{1}{2(z_1 + z_2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Abzählen von Nullstellen

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$, $f(z_0) = w$. f nehme den Wert w in z_0 mit der Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$ an, das heißt es existieren $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = w + (z - z_0)^k g(z).$$

Daraus folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z) - w} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da $g(z_0) \neq 0$ gilt, folgt

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z) - w} = k.$$

Sei f meromorph in G , und z_0 ein Pol der Ordnung k . Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann hat $f(z) - w$ ebenfalls einen Pol der Ordnung k in z_0 . Daher existieren $r > 0$ und eine holomorphe Funktion $g: D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) - w = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Damit ist

$$\frac{f'(z)}{f(z) - w} = \frac{-k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

und wir erhalten

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z) - w} = -k.$$

Aus dem Residuensatz folgt:

Satz 15.4. Sei G ein Gebiet und f meromorph in G . Seien $\{b_i\}$ die Pole von f mit Vielfachheiten $k_i, i \in I$. Sei $w \in \mathbb{C}$ und a_1, \dots, a_r seien die Lösungen von $f(z) = w$ mit Vielfachheiten m_i . Sei Γ ein nullhomologer Zyklus in G , der keinen Pol und keine w -Stelle trifft. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{i=1}^r n(\Gamma, a_i) m_i - \sum_{i \in I} n(\Gamma, b_i) k_i$$

Korollar 15.5. Sei G ein positiv berandetes Gebiet und f eine in einer Umgebung von \bar{G} meromorphe Funktion, die auf ∂G die Werte w und ∞ nicht annimmt. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = N(w) - N(\infty),$$

wobei $N(w)$ und $N(\infty)$ die Anzahl der w -Stellen beziehungsweise Pole, mit Vielfachheit gezählt, bezeichnet.