
Einführung in die Komplexe Analysis

Probeklausur

9. Juli 2015

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

Bestimmen Sie die Punkte der komplexen Ebene, in denen folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind.

- a) $f(z) := z \operatorname{Re}(z^2)$.
- b) $f(x + iy) := \sin^2(x) + 2ixy^2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonische Funktionen sind.

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte)

Bestimmen Sie alle möglichen Werte der folgenden Ausdrücke.

- a) i^{-i} .
- b) $2^{\sqrt{i}}$.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

- a) $\int_{|z-1|=1} \frac{z^3}{(z-1)^4} dz$.
- b) $\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} dz$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $|f(z) - i| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 6 (5 + 5 Punkte)

Bestimmen Sie Lage und Typ der Singularitäten folgender Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

a) $f(z) := \frac{\exp(z-1)}{z-1}$.

b) $f(z) := \frac{\exp(\frac{1}{z})}{z-1}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von $f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ für $|z| < 1$ und $1 < |z| < 2$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Es sei f holomorph auf dem beschränkten Gebiet G und strebe bei Annäherung von z an ∂G gleichmäßig gegen 0 (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in G$ mit $d(z, \partial G) < \delta$). Zeigen Sie, dass dann $f \equiv 0$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie den Satz von Liouville.

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy Integralformel benutzen.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx.$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!