

Shimura-Varietäten III

Ulrich Görtz

<http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html>

5. Mai 2006

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall
- 4 Harter Descent

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall
- 4 Harter Descent

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall
- 4 Harter Descent

Shimura-Daten

Definition

Ein **Shimura-Datum** ist ein Paar (G, X) , bestehend aus einer reduktiven algebraischen Gruppe G über \mathbb{Q} und einer $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von Homomorphismen $h: \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass gilt:

- SV1** Für alle $h \in X$ ist $\text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$.
- SV2** Die Involution $\text{int}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$.
- SV3** G^{ad} hat keinen über \mathbb{Q} definierten Faktor H , so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

Satz

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Dann trägt X eine eind. best. Struktur einer kpl. Mf., so dass für jede Darstellung $\rho: G_{\mathbb{R}} \rightarrow GL(V)$ die Familie $(V, \rho \circ h)_{h \in X}$ eine holom. Familie von HS ist.

Für diese kpl. Struktur ist jede solche Familie sogar eine Variation von HS. Insbes. ist X eine endl. disj. Vereinigung hermitescher symmetrischer Bereiche.

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$$

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$$

Alternative Beschreibung

Ist $X = G(\mathbb{R}) / K_\infty$, so

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / KK_\infty$$

Satz

Sei $\mathcal{C} \subset G(\mathbb{A}_f)$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f) / K$.

Sei X^+ eine Zusammenhangskomponente von X .

Dann

$$G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K \cong \coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g \backslash X^+,$$

wobei $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$.

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell**
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall
- 4 Harter Descent

Modelle von Varietäten über Zahlkörpern

Sei V ein Schema über \mathbb{C} .

Definition

Ein Modell von V über einem Zahlkörper k ist ein Schema V_0 über k mit einem Isomorphismus $V_0 \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V$.

Zu gegebenem V gibt es in der Regel kein Modell über einem Zahlkörper. Wenn eines existiert, so ist es in der Regel nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel: Elliptische Kurven

Eine elliptische Kurve E über \mathbb{C} hat genau dann ein Modell über einem Zahlkörper, wenn die j -Invariante $j(E) \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl ist.

Ist

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in k,$$

ein Modell von E , so ist auch

$$y^2 = x^3 + ac^2x + bc^3, \quad c \in k,$$

eines, das zum ersten genau dann isomorph ist, wenn c ein Quadrat in k ist.

Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C}/E)$

Ist V_0 ein Modell von V/\mathbb{C} über E , so erhalte Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C}/E)$ auf $V(\mathbb{C}) = V_0(\mathbb{C})$.

Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C}/E)$

Ist V_0 ein Modell von V/\mathbb{C} über E , so erhalte Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C}/E)$ auf $V(\mathbb{C}) = V_0(\mathbb{C})$.

$\text{Aut}(\mathbb{C}/E)$ ist sehr groß, und keiner expliziten Beschreibung zugänglich.

Beispiel

Ist $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ eine ell. Kurve über \mathbb{C} mit j -Invariante $j(\tau)$, so ist im allgemeinen

$$j(\sigma E) = \sigma(j(\tau)) \neq j(\sigma\tau).$$

Globale Klassenkörpertheorie

Theorem

E Zahlkörper

$$\pi_0(E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(\overline{E}/E)^{\text{ab}}$$

Beispiel

Satz von Kronecker-Weber

$$\mathbb{Q}^{\text{ab}} = \mathbb{Q}(\zeta_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

und es gilt

$$\pi_0(\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

Die Artin-Abbildung

Haben Abbildung

$$\text{art}: \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E),$$

so dass für L/E endlich, abelsch

$$\begin{array}{ccc} E^\times \setminus \mathbb{A}_E^\times & \xrightarrow{\text{art}} & \text{Gal}(E^{\text{ab}}/E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^\times \setminus \mathbb{A}_E^\times / \text{Nm}_{L/E} \mathbb{A}_L^\times & \xrightarrow[\text{art}_{L/E}]{\cong} & \text{Gal}(L/E) \end{array}$$

kommutiert und $\text{art}_{L/E}$ ist eindeutig charakterisiert durch

- Für $v \in \text{Pl}_0(E)$ unverzweigt ist $\text{art}_{L/E}(\pi_v) = \text{Fr}(v, L/E)^{-1} \in \text{Gal}(L/E)$
- Es gilt $\text{art}_{L/E}(u) = 1$ für alle $u = (u_v)_v \in \mathbb{A}_E^\times$, s. d.
 - Für v unverzweigt in L ist u_v eine Einheit,
 - Für v verzweigt ist $|u_v - 1|$ "klein" (abh. von L/E),
 - Für v reell und komplex in L ist $u_v > 0$.

Endomorphismen elliptischer Kurven

$E = \mathbb{C}/\Lambda$ elliptische Kurve $/\mathbb{C}$.

$$\text{End}(E) = \{\alpha \in \mathbb{C}; \alpha\Lambda \subseteq \Lambda\}$$

Beispiel

$$\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau, \tau \in \mathbb{H}.$$

Sei $\alpha = x + iy \in \text{End}(E)$, $y \neq 0$.

Dann

$$\alpha \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau, \quad \alpha\tau \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$$

Erhalte quadratische Gleichung für τ .

Endomorphismen elliptischer Kurven

Satz

Sei E eine elliptische Kurve über einem perfekten Körper k . Dann ist der Ring $\text{End}(E)$ der Endomorphismen von E

- 1 \mathbb{Z} , oder
- 2 eine Ordnung in einem imaginär-quad. Zahlkörper
- 3 eine Ordnung in einer definiten Quaternionenalgebra über \mathbb{Q}

Ist $\text{char } k = 0$, so können nur die ersten beiden Fälle eintreten.

Definition

Sei E/\mathbb{C} eine elliptische Kurve. Wir sagen, E habe komplexe Multiplikation, falls $\text{End}(E) \neq \mathbb{Z}$.

Komplexe Multiplikation

Sei K/\mathbb{Q} ein imaginär-quad. Zahlkörper, $R_f = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ eine Ordnung.

Satz

- Ist $M \subseteq K$ ein Gitter mit Endomorphismenordnung R_f , so ist $E = \mathbb{C}/M$ eine elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation, und $\text{End}(E) \cong R_f$.
- Diese Zuordnung definiert Bijektion

$$(\text{Ell.K. } E/\mathbb{C} \text{ mit } \text{End}(E) \cong R_f) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}(R_f)$$

Korollar

Ist E eine elliptische Kurve $/\mathbb{C}$ mit komplexer Multiplikation, so ist $j(E)$ algebraisch.

Explizite Klassenkörpertheorie

Theorem (Weber-Fueter)

Sei K ein imaginär-quad. Zahlkörper, E die ell. Kurve mit CM durch \mathcal{O}_K zu $\Lambda \in \text{Cl}(\mathcal{O}_K)$.

- $j(E)$ ist eine **ganze** algebraische Zahl.
- $[K(j(E)) : K] = [\mathbb{Q}(j(E)) : \mathbb{Q}]$.
- $H := K(j(E))$ ist die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung von K .
- Sei $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ ein Vertretersystem für $\text{Cl}(\mathcal{O}_K)$. Dann sind $j(\Lambda_1), \dots, j(\Lambda_h)$ die $\text{Gal}(H/K)$ -Konjugierten von $j(\Lambda)$.

Haben Frobenius-Element $\text{Fr}_p \in \text{Gal}(H/K)$ durch

$$\text{Fr}_p \in \text{Gal}(H_{\mathfrak{p}}/K_p) \longrightarrow \text{Gal}(\overline{H}_{\mathfrak{p}}/\overline{K}_p).$$

Theorem (Hasse)

Sei $\Lambda \in \text{Cl}(\mathcal{O}_K)$, $H = K(j(\Lambda))$. Sei \mathfrak{p} ein Primideal von \mathcal{O}_K . Wenn es eine elliptische Kurve über H mit j -Invariante $j(\Lambda)$ gibt, die an allen Stellen von H über \mathfrak{p} gute Reduktion hat, so gilt

$$\text{Fr}_p(j(\Lambda)) = j(\Lambda\mathfrak{p}^{-1}).$$

Der zu h assoz. Kocharakter

Lemma

Sei G/\mathbb{Q} eine reduktive alg. Gruppe, $k \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper, über dem G zerfällt, d. h. G_k enthält einen maximalen Torus $T \cong \mathbb{G}_{m,k}^r$. Sei $W = N_{G(k)}(T)/C_{G(k)}(T)$ die Weyl-Gruppe von T . Dann ist die Abbildung

$$W \backslash \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow{\cong} G(k) \backslash \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G_k)$$

bijektiv.

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Zu $x \in X$ definiere

$$\mu_x: \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto h_{x,\mathbb{C}}(z, 1).$$

Dies definiert einen Kocharakter $\mu_x \in \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\mathbb{C}})$. Können $\mu = \mu_x$ als Element von $G(\overline{\mathbb{Q}}) \backslash \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\overline{\mathbb{Q}}})$ betrachten, unabhängig von x .

Der Reflexkörper

Definition

Der Reflexkörper $E(G, X)$ des Shimura-Datums (G, X) ist der Definitionskörper von μ , d. h. der Fixkörper in $\overline{\mathbb{Q}}$ der Untergruppe

$$\{\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}); \sigma\mu = \mu \in G(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\overline{\mathbb{Q}}})\} \subseteq \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Beispiel

- Ist $G = T$ ein Torus, so ist der Reflexkörper der Definitionskörper von μ_h .
- Ist (G, X) ein einfaches PEL-Datum, so ist $E(G, X)$ der Körper, der über \mathbb{Q} erzeugt wird von den Elementen $\text{Tr}_X b = \text{Tr}(b|_{V(\mathbb{C})/F_h^0})$, $b \in B$.

Der Fall von Tori

Sei k ein Körper der Char. 0. Haben Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{l} (0\text{-dim. Varietäten } /k) \xrightarrow{\cong} \\ (\text{Endl. Mengen mit stetiger } \text{Gal}(\bar{k}/k)\text{-Operation}) \end{array}$$

Um ein Modell über einem Zahlkörper E von einer 0-dimensionalen Varietät V über \mathbb{C} anzugeben, genügt es eine Operation von $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/E)$ auf der endlichen Menge $V(\mathbb{C})$ anzugeben.

Sei T/\mathbb{Q} ein Torus, $h: \mathbb{S} \rightarrow T$. Dann ist $(T, \{h\})$ ein Shimura-Datum, und $E = E(T, h)$ ist der Definitionskörper von μ_h . Die Menge

$$\mathrm{Sh}_K(T, h) = T(\mathbb{Q}) \setminus \{h\} \times T(\mathbb{A}_f) / K$$

ist endlich, und mit

$$r_h: \mathbb{A}_E^\times \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mu_h(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})}} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$$

induziert die Vorschrift

$$\sigma(h, a) = (h, r_h(s)a)$$

für $\sigma = \mathrm{art}(s)$ eine Operation von $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E)$ auf $\mathrm{Sh}_K(T, X)$. Das zugehörige Modell von $\mathrm{Sh}_K(T, h)$ ist per definitionem kanonisch.

Spezielle Punkte

Definition

Ein Punkt $x \in X$ heißt **speziell**, wenn ein Torus $T \subseteq G$ über \mathbb{Q} existiert, so dass $h_x(\mathbb{C}^\times) \subseteq T(\mathbb{R})$.

Das Paar (T, x) (oder (T, h_x)) heißt dann ein spezielles Paar in (G, X) .

Beispiel

Sei $G = GL_2$, $X = \mathbb{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei $z \in X$, so dass $F = \mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ eine imaginär-quadratische Erweiterung von \mathbb{Q} ist.

Erhalte Einbettung $F = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}z \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ und daraus einen maximalen Torus $T = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F} \subseteq GL_{2,\mathbb{Q}}$.

Es ist (T, z) ein spezielles Paar. Ist andererseits $z \in X$ speziell, so ist $\mathbb{Q}(z)$ eine imaginär-quadratische Erweiterung von \mathbb{Q} .

Der Homomorphismus r_x

Sei T/\mathbb{Q} ein Torus, sei E/\mathbb{Q} eine endliche Erweiterung, und sei μ ein über E definierter Kocharakter von T .

Sei $r(T, \mu)$ der Homomorphismus

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mu} \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} T \xrightarrow{\mathrm{Nm}} T$$

Sei (T, x) ein spezielles Paar in (G, X) , sei $E(x)$ der Definitionskörper von μ_x . Definiere Homomorphismus r_x

$$\mathbb{A}_{E(x)}^\times \xrightarrow{r(T, \mu_x)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}, f})$$

Definition des kanonischen Modells

Für ein spezielles Paar (T, x) in (G, X) haben wir Homomorphismen

$$\begin{aligned} \text{art} &: \mathbb{A}_{E(x)}^\times \longrightarrow \text{Gal}(E(x)^{\text{ab}}/E(x)) \\ r_x &: \mathbb{A}_{E(x)}^\times \longrightarrow T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \end{aligned}$$

Definition

Sei (G, X) ein Shimura-Datum, $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen. Ein Modell $M_K(G, X)$ von $\text{Sh}_K(G, X)$ über $E(G, X)$ heißt **kanonisches Modell**, wenn für jedes spezielle Paar (T, x) und jedes $a \in G(\mathbb{A}_f)$ der Punkt $[x, a]_K$ Koordinaten in $E(x)^{\text{ab}}$ hat und

$$\sigma[x, a]_K = [x, r_x(s)a]_K$$

für alle $\sigma \in \text{Gal}(E(x)^{\text{ab}}/E(x))$, $s \in \mathbb{A}_{E(x)}^\times$ mit $\text{art}_{E(x)}(s) = \sigma$.

Definition

- Ein Modell von $\mathrm{Sh}(G, X)$ über einem Teilkörper $E \subseteq \mathbb{C}$ ist ein inverses System $(M_K(G, X))_K$ von Varietäten über E mit einer Rechtsoperation von $G(\mathbb{A}_f)$, zusammen mit einem $G(\mathbb{A}_f)$ -äquivalenten Isomorphismus $(M_K(G, X))_K \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Sh}_K(G, X))_K$.
- Ein solches Modell heißt kanonisch, wenn für jedes K das Modell $M_K(G, X)$ ein kanonisches Modell von $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ ist.

Zusammenhangskomponenten

Sei (G, X) ein Shimura-Datum, Z das Zentrum von G ,
 $T = G/G^{\text{der}}$ der größte abelsche Quotient von G . Haben
 $Z \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T$.

Definiere

$$T(\mathbb{R})^\dagger = \text{im}(Z(\mathbb{R}) \longrightarrow T(\mathbb{R}))$$

$$T(\mathbb{Q})^\dagger = T(\mathbb{Q}) \cap T(\mathbb{R})^\dagger$$

Beispiel

Ist $G = GL_2$, so ist $\nu = \det: GL_2 \rightarrow T \cong \mathbb{G}_m$,
 $T(\mathbb{Q})^\dagger = T(\mathbb{Q})^+ = \mathbb{Q}_{>0}$.

Theorem

Sei G^{der} einfach zusammenhängend.

- ① Es gilt $\nu(G(\mathbb{Q})_+) \subseteq T(\mathbb{Q})^\dagger$.
- ② Für hinreichend kleine K induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K & \xrightarrow{\cong} & \\
 G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) / K & \longrightarrow & T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K) \\
 (x, g) & \mapsto & \nu(g)
 \end{array}$$

eine Bijektion

$$\pi_0(\text{Sh}_K(G, X)) \xrightarrow{\cong} T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)$$

Galois-Op. auf π_0

Ist G^{der} einfach zusammenhängend, so gilt

$$\begin{aligned}\pi_0(\text{Sh}_K(G, X)) &= T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K) \\ &= T(\mathbb{Q}) \backslash (T(\mathbb{R})^\dagger \backslash T(\mathbb{R})) \times T(\mathbb{A}_f) / \nu(K).\end{aligned}$$

Sei $x \in X$, $h = \nu \circ h_x: \mathbb{S} \rightarrow T$ und μ_h der zugehörige Kocharakter von $T_{\mathbb{C}}$. Erhalten

$$r: \mathbb{A}_{E(G, X)}^\times \rightarrow T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}).$$

Sei $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/E(G, X))$, und sei $s \in \mathbb{A}_{E(G, X)}^\times$ mit $\text{art}_{E(G, X)}(s) = \sigma|_{E(G, X)^{\text{ab}}}$. Sei $r(s) = (r(s)_\infty, r(s)_f)$. Dann

$$\sigma(y, a) = (r(s)_\infty y, r(s)_f a), \quad y \in T(\mathbb{R})^\dagger \backslash T(\mathbb{R}), \quad a \in T(\mathbb{A}_f).$$

Eindeutigkeit kanonischer Modelle

Lemma

Sei $L \subset \mathbb{C}$ eine endlicher Erweiterungskörper von $E(G, X)$. Dann existiert ein spezieller Punkt x , so dass $E(x)$ und L linear disjunkt sind.

Eindeutigkeit kanonischer Modelle

Lemma

Sei $L \subset \mathbb{C}$ eine endlicher Erweiterungskörper von $E(G, X)$. Dann existiert ein spezieller Punkt x , so dass $E(x)$ und L linear disjunkt sind.

Theorem

- 1 Sind M_1, M_2 kanonische Modelle von $\mathrm{Sh}_K(G, X)$, so existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$, der auf $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ die Identität induziert.
- 2 Sind für alle K kanonische Modelle von $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ gegeben, so bilden diese ein kanonisches Modell von $\mathrm{Sh}(G, X)$.

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall**
- 4 Harter Descent

Das Shimura-Datum zu einem symplektischen VR

Sei (V, ψ) ein symplektischer \mathbb{Q} -VR, $G = GSp(V, \psi)$.

Ist $J \in G^{\text{der}}(\mathbb{R})$ eine komplexe Struktur auf $V(\mathbb{R})$, so erhalte HS $h_J: \mathbb{S} \rightarrow G \subseteq GL(V)$ vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ auf V .

Wir nennen J positiv (negativ), wenn $\psi(u, Jv)$ positiv (negativ) definit ist.

Sei X^+ (bzw. X^-) die Menge der positiven (bzw. negativen) kompl. Str. auf $V(\mathbb{R})$, $X = X(V, \psi) = X^+ \amalg X^-$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei \mathcal{M}_K die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über \mathbb{C}
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} H_1(A, \mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \rightarrow A'$ existiert, die s auf ein \mathbb{Q}^\times -Vielfaches auf s' , und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Die Menge $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ steht in natürlicher Weise in Bijektion zu \mathcal{M}_K / \cong .

CM-Körper

Definition

Ein Zahlkörper E heißt CM-Körper, wenn E eine total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers F ist.

Sei $x \mapsto x^*$ der nicht-triviale Homomorphismus in $\text{Gal}(E/F)$. Dann gilt $\rho(x^*) = \overline{\rho(x)}$ für jede Einbettung $\rho: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Definition

Ein CM-Typ Φ für E ist eine Teilmenge $\Phi \subset \text{Hom}(E, \mathbb{C})$, so dass

$$\text{Hom}(E, \mathbb{C}) = \Phi \amalg \overline{\Phi}.$$

CM für abelsche Varietäten

Definition

Sei A/\mathbb{C} eine abelsche Varietät der Dimension g , sei E ein CM-Körper mit $[E:\mathbb{Q}] = 2g$, und sei $i: E \rightarrow \text{End}^0(A)$ ein Homomorphismus. Gilt

$$\text{Tr}(i(a)|_{T_0A}) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(a) \text{ für alle } a \in E$$

so sagen wir, A habe komplexe Multiplikation durch (E, Φ) .

Sei Φ ein CM-Typ für E . Betrachte Abbildung

$$\Phi: \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{C}^\Phi, \quad x \mapsto (\phi(a))_{\phi \in \Phi}.$$

Satz

Das Bild $\Phi(\mathcal{O}_E)$ von Φ ist ein Gitter in \mathbb{C}^Φ und $A_\Phi = \mathbb{C}^\Phi / \Phi(\mathcal{O}_E)$ ist eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) .

Jede abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) ist E -isogen zu A_Φ .

Sei Φ ein CM-Typ für E . Betrachte Abbildung

$$\Phi: \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{C}^\Phi, \quad x \mapsto (\phi(a))_{\phi \in \Phi}.$$

Satz

Das Bild $\Phi(\mathcal{O}_E)$ von Φ ist ein Gitter in \mathbb{C}^Φ und $A_\Phi = \mathbb{C}^\Phi / \Phi(\mathcal{O}_E)$ ist eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) .

Jede abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) ist E -isogen zu A_Φ .

Satz

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) über \mathbb{C} . Dann hat (A, i) ein Modell über $\overline{\mathbb{Q}}$, das bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

Der Reflexkörper eines CM-Typs

Definition

Der Reflex-Körper E^* eines CM-Typs (E, Φ) ist der Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}}$, der die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ fixiert E^* genau dann, wenn $\sigma\Phi = \Phi$.
- $E^* = \mathbb{Q}(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(a), a \in E)$
- E^* ist der kleinste Teilkp. k von $\overline{\mathbb{Q}}$, so dass ein k -VR V mit einer E -Operation existiert, für die gilt

$$\text{Tr}_k(a|_V) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(a) \quad \text{für alle } a \in E$$

Beispiel

Sei (E, Φ) ein CM-Typ, und sei $T = \text{Res}_{E, \mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$, also $T(\mathbb{Q}) = E^\times$,

$$T(\mathbb{R}) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^\Phi)^\times, \quad e \otimes r \mapsto (\varphi(e)r)_{\varphi \in \Phi}.$$

Definiere $h_\Phi: \mathbb{C}^\times \rightarrow T(\mathbb{R})$ durch $z \mapsto (z, \dots, z)$. Der zugehörige Kocharakter μ_h ist

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times &\longrightarrow T(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^\Phi)^\times \times (\mathbb{C}^{\bar{\Phi}}) \\ z &\longmapsto (z, \dots, z, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Der Reflexkörper ist dann der Reflexkörper des CM-Typs (E, Φ) .

Hauptsatz über abelsche Varietäten mit CM

Reflexnorm

Sei V ein E^* -VR wie oben. Die Reflex-Norm N_{Φ^*} ist der Homom.

$$\mathrm{Res}_{E^*/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m, \quad a \mapsto \det_E(a|_V), \quad a \in (E^*)^\times$$

Ist (A, i) eine abelsche Varietät mit CM vom Typ (E, Φ) , so ist E^* in jedem Definitionskörper von (A, i) enthalten.

Sei A eine abelsche Varietät über einem Kp. K der Char. 0.

$$T_\ell := \varprojlim A(\overline{K})[\ell^n]$$

$$V_f(A) := \left(\prod_\ell T_\ell \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \prod_\ell ((T_\ell \otimes \mathbb{Q}) | T_\ell) = H_1(A, \mathbb{A}_f)$$

Theorem

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) über \mathbb{C} , und sei $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/E)$. Sei $s \in \mathbb{A}_{E^*, f}^\times$ mit $\text{art}_{E^*}(s) = \sigma|_{E^*, \text{ab}}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte E -lineare Isogenie $\alpha: A \rightarrow \sigma A$, so dass

$$\alpha(N_{\Phi^*}(s) \cdot x) = \sigma x$$

für alle $x \in V_f(A)$.

Shimura-Taniyama-Formel

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) , definiert über einem Zahlkörper k , die gute Reduktion in $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_k$ hat.

Lemma

Der Frobenius-Endomorphismus $\pi_{A_{\mathfrak{P}}}$ von $A_{\mathfrak{P}}$ liegt in $\iota_{\mathfrak{P}}(E)$.

Sei nun k/\mathbb{Q} eine Galois-Erweiterung, die alle Konjugierten von E enthält.

Theorem

Ist $v|p$ eine Primstelle von E , so gilt

$$\frac{\text{ord}_v(\pi_{A_{\mathfrak{P}}})}{\text{ord}_v(q)} = \frac{|\Phi \cap H_v|}{|H_v|},$$

wobei $H_v = \{\rho: E \rightarrow k; \rho^{-1}(\mathfrak{P}) = v\}$.

Spezielle Punkte im Siegel-Fall

Definition

Eine CM-Algebra ist ein endliches Produkt von CM-Körpern. Eine abelsche Varietät A über \mathbb{C} hat CM, falls eine CM-Algebra E und ein Homomorphismus $E \rightarrow \text{End}^0(A)$ existieren, so dass $H_1(A, \mathbb{Q})$ ein freier E -Modul vom Rang 1 ist.

Satz

Eine abelsche Varietät A/\mathbb{C} ist genau dann CM, wenn ein Torus $T \subset GL(H_1(A, \mathbb{Q}))$ existiert, so dass $h_A(\mathbb{C}^\times) \subseteq T(\mathbb{R})$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei \mathcal{M}_K die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über \mathbb{C}
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} V_f(\mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \rightarrow A'$ existiert, die s auf ein \mathbb{Q}^\times -Vielfaches auf s' , und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Der Raum \mathcal{M}_K ist in natürlicher Weise über \mathbb{Q} definiert und ist das kanonische Modell der Siegel-Shimura-Varietät $\mathrm{Sh}_K(G, X)$.

- 1 Wiederholung
- 2 Das kanonische Modell
- 3 Das kanonische Modell im Siegel-Fall
- 4 Harter Descent**

Harter Descent

Sei k'/k eine Körpererweiterung, $\text{char } k = 0$, k' alg. abgeschlossen, $\mathcal{A} = \text{Aut}(k'/k)$.

Haben volltreuen Funktor

$(k\text{-Schemata}) \rightarrow (k'\text{-Schemata } V + \mathcal{A}\text{-Operation auf } V(k'))$.

Frage: Wann liegt (V, \cdot) im Bild dieses Funktors?

Regularität

Die Operation \cdot von \mathcal{A} auf $V(k')$ heißt regulär, wenn für alle $\sigma \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$(\sigma V)(k') \longrightarrow V(k'), \quad \sigma x \mapsto \sigma \cdot x$$

von einem Isomorphismus von Schemata kommt.

Stetigkeit

Die Operation \cdot von \mathcal{A} auf $V(k')$ heißt stetig, wenn ein Teilkörper $L \subseteq k'$ existiert, der k enthält und endlich erzeugt ist über k , und ein Modell V_0 von V über L existiert, so dass die durch V_0 auf $V(k')$ definierte $\text{Aut}(k'/L)$ -Operation die Einschränkung von \cdot ist.

Satz

Eine reguläre Operation \cdot auf $V(k')$ ist stetig, wenn Punkte $x_1, \dots, x_n \in V(k')$ existieren, so dass

- 1 *Der einzige Automorphismus von V , der alle Punkte x_i fixiert, ist id_V .*
- 2 *Es existiert ein Teilkörper $L \subseteq k'$, der endlich erzeugt über k ist, und so dass für jedes $\sigma \in \text{Aut}(k'/L)$ gilt: $\sigma x_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Theorem (Weil)

Ist V/k' quasi-projektiv, und ist die Operation \cdot regulär und stetig, so entsteht (V, \cdot) durch Basiswechsel von einer Varietät über k .