

Shimura-Varietäten I

Ulrich Görtz

<http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html>

4. Mai 2006

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen

Was sind Shimura-Varietäten

- $\mathrm{Sh}(G, X) = \varprojlim_K G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$
- Beschreibung als (endl. disj. Ver. von) Quotient eines hermitesch symmetrischen Bereichs nach einer diskreten Gruppe
- Beschreibung als Modulraum (von abelschen Var./Hodge-Strukturen)
- Gruppenoperation von $G(\mathbb{A}_f)$
- Modelle über Zahlkörpern (\rightarrow Galois-Darstellungen)

Literatur

- **P. Deligne, Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, in: Corvallis proceedings, 1979**
- P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Sémin. Bourbaki, exp. 389, Springer LNM 244
- G. Shimura
- **J. Milne, Introduction to Shimura varieties, <http://www.jmilne.org/math/>**
- J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*, <http://www.jmilne.org/math/>

Benötigte Kenntnisse für Shimura-Varietäten

J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*:

Thus it appears that the prerequisite for understanding Shimura varieties is being able to count to two—three would be useful, but not strictly necessary.

Benötigte Kenntnisse für Shimura-Varietäten

J. Milne, *Canonical models of Shimura curves*:

I once wrote to Deligne to point this out, and noted that there were three changes of sign between his Bourbaki talk and his Corvallis article. He responded: “Mea culpa, mea maxima culpa. My sign is wrong, and your explanation ... plausible: I could not count to three.”

Thus it appears that the prerequisite for understanding Shimura varieties is being able to count to two—three would be useful, but not strictly necessary.

Die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$$

$SL_2(\mathbb{R})$ operiert auf \mathbb{H} :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d},$$

der Stabilisator von i ist SO_2 , und wir erhalten Homöomorphismus $SL_2(\mathbb{R})/SO_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}$.

Riemannsche Metrik, $SL_2(\mathbb{R})$ -invariant: $\frac{dx dy}{y^2}$

$\mathbb{H} \cong \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ durch $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Modulkurven

Definiere

$$\Gamma(N) = \{g \in SL_2(\mathbb{Z}); g \equiv E_2 \pmod{N}\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z}), \quad N \geq 1.$$

Definition

Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ heißt **Kongruenzuntergruppe**, wenn ein N mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ existiert.

$\Gamma \backslash \mathbb{H}$ Riemannsche Fläche.

Modulkurven sind algebraisch

Kompaktifizierung

$X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H} \cup \{\text{Spitzen}\}$ kompakte Riemannsche Fläche, also projektive algebraische Kurve $/\mathbb{C}$

Modulformen (zur Stufe Γ , von geradem Gewicht $2k$) sind Elemente von $H^0(X_\Gamma, \omega^{\otimes k})$.

Modell über Zahlkörper

Modulraum elliptischer Kurven

Elliptische Kurve über \mathbb{C} : \mathbb{C}/Λ

Die Abbildung $\mathbb{H} \rightarrow \text{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong, \tau \mapsto \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ induziert Bijektion

$$SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \rightarrow \text{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong .$$

Modell über Zahlkörper

Modulraum elliptischer Kurven

Elliptische Kurve über \mathbb{C} : \mathbb{C}/Λ

Die Abbildung $\mathbb{H} \rightarrow \text{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong, \tau \mapsto \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ induziert Bijektion

$$SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \rightarrow \text{Ell}_{\mathbb{C}}/\cong .$$

Fixiere primitive N -te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$. Haben Bijektion

$$\begin{aligned} \Gamma(N)\backslash\mathbb{H} &\xrightarrow{\cong} \{(E, \eta); E \text{ ell. K.}/\mathbb{C}, \\ &\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N], \\ &\text{so dass } e_N(\eta(1, 0), \eta(0, 1)) = \zeta\} \end{aligned}$$

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen**
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen

Lineare algebraische Gruppen

Sei k ein Körper.

Definition

Eine lineare algebraische Gruppe über k ist eine Gruppenvarietät G über k , die die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- G ist affin
- G ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppenvarietät von $GL_{n,k}$, n geeignet.

Beispiele

$$GL_n(k) = \{A \in M_{n \times n}(k); A \text{ invertierbar}\}$$

$$SL_n(k) = \{A \in GL_n(k); \det A = 1\}$$

$$GSp_{2n}(k) = \{A \in GL_{2n}(k); \exists c(A) \in k^\times : {}^tAJA = c(A)J\},$$

$$J = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$$

$$O_n(k) = \{A \in GL_n(k); {}^tAA = E_n\}$$

$$\mathbb{G}_m = GL_1$$

Tori

Definition

Ein algebraischer **Torus** ist eine lineare algebraische Gruppe, die die folgenden äquivalenten Eigenschaften hat:

- $T_{\bar{k}} \cong (\mathbb{G}_{m,\bar{k}})^r$, r geeignet
- T zusammenhängend und alle Elemente von $T(\bar{k})$ sind halbeinfach
- T zusammenhängend und (über \bar{k}) diagonalisierbar

Theorem

Haben Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ll}
 (\text{algebraische Tori}/k) & \xrightarrow{\cong} (\text{freie } \mathbb{Z} - \text{Moduln} \\
 & \text{mit } \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k) - \text{Operation}) \\
 T & \mapsto X^*(T) = \text{Hom}(T_{k^{\text{sep}}}, \mathbb{G}_{m,k^{\text{sep}}})
 \end{array}$$

Darstellungen von Tori

Satz

Sei T ein Torus über k , $\rho: T \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\rho(T)$ über k^{sep} konjugiert zu einer Untergruppe der Gruppe der Diagonalmatrizen.

Es ist also

$$V(k^{\text{sep}}) = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_{\alpha},$$

wobei

$$V_{\alpha} = \{v \in V(k^{\text{sep}}); tv = \alpha(t)v\}$$

den "Eigenraum" zum Charakter α bezeichnet.

Jedes Element $\sigma \in \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$ induziert $V_{\alpha} \xrightarrow{\cong} V_{\sigma\alpha}$.

Umgekehrt induziert eine Zerlegung $(*)$ zusammen mit einer Galois-Operation wie oben eine Darstellung von T auf V .

Beispiel: Darstellungen von U_1

Charaktere von $U_1: z \mapsto z^n, n \in \mathbb{R}$. Also $X^*(T) = \mathbb{Z}$, und komplexe Konjugation operiert durch $n \mapsto -n$.

Eine Darstellung von U_1 auf V entspricht also einer Zerlegung

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

so dass $\overline{V_n} = V_{-n}$ für alle n .

Satz

Jede Darstellung von U_1 ist eine direkte Summe von Darst. der Form

- 1 $V = \mathbb{R}$ mit trivialer U_1 -Operation,
- 2 $V = \mathbb{R}^2$, so dass $V(\mathbb{C}) = V^n \oplus V^{-n}$.

Weil-Restriktion

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung. Sei G eine algebraische Gruppe über K . Können G als algebraische Gruppe über k auffassen.

Funktoriell:

$$\mathrm{Res}_{K/k} G(R) = G(R \otimes_k K)$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{Res}_{K/k} G)_K = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} G$

Weil-Restriktion

Sei K/k eine endliche Galois-Erweiterung. Sei G eine algebraische Gruppe über K . Können G als algebraische Gruppe über k auffassen.

Funktoriell:

$$\mathrm{Res}_{K/k} G(R) = G(R \otimes_k K)$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{Res}_{K/k} G)_K = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} G$

Ähnlich: B endlich-dimensionale k -Algebra. Können B^\times als algebraische Gruppe über k auffassen:

$$B^\times(R) = (B \otimes_k R)^\times.$$

Halbeinfache Gruppen

Definition

Eine zushgd. algebraische Gruppe G über k heißt **halbeinfach**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Die maximale zusammenhängende auflösbare normale Untergruppe von G ist $\{1\}$
- 2 G hat keine zusammenhängende abelsche normale Untergruppe $\neq \{1\}$.

Beispiel

- SL_n , PGL_n , Sp_{2n} sind halbeinfach
- GL_n , \mathbb{G}_m , die Untergruppe der ob. Dreiecksmat. in GL_n sind nicht halbeinfach

Einfach zushg., adjungierte Gruppen

Definition

Eine halbeinfache Gruppe G heißt

- einfach zusammenhängend, wenn jede (zentrale) Isogenie $H \rightarrow G$ ein Isomorphismus ist,
- adjungiert, wenn jede (zentrale) Isogenie $G \rightarrow H$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel

- SL_n, Sp_{2n} sind halbeinfach, einfach zusammenhängend
- PGL_n ist halbeinfach, adjungiert

Reduktive Gruppen

Definition

Eine zushgd. algebraische Gruppe G über k heißt **reduktiv**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- 1 Die maximale zusammenhängende unipotente normale Untergruppe von G ist $\{1\}$
- 2 G hat keine zusammenhängende unipotente abelsche normale Untergruppe $\neq \{1\}$.
- 3 (falls $\text{char } k = 0$) G ist linear reduktiv, d. h. zu jeder Darstellung $\rho: G \rightarrow GL(V)$ und jedem G -invarianten UVR $W \subseteq V$ existiert ein G -invariantes Komplement.

Beispiel

- GL_n , GSp_{2n} , halbeinfache Gruppen, Tori sind reduktiv
- \mathbb{G}_a , die UG der ob. Dreiecksmat. in GL_n sind nicht reduktiv

Sei G eine reduktive Gruppe. Haben exakte Sequenzen

$$1 \longrightarrow G^{\text{der}} \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \xrightarrow{\text{ad}} G^{\text{ad}} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow Z' \longrightarrow Z \longrightarrow T \longrightarrow 1$$

Sei G eine algebraische Gruppe. Wir bezeichnen mit

$G(\mathbb{R})^+$ die Zusammenhangskomponente von 1
bzgl. der analytischen Topologie,

$G(\mathbb{R})_+$ das Urbild von $G^{\text{ad}}(\mathbb{R})^+$ in $G(\mathbb{R})$,

$G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche**
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen

Hermiteisch-symmetrische Räume

Definition

Eine **hermitesche Mf.** ist eine komplexe Mf. M zusammen mit einer hermiteschen Metrik g .

Definition

Eine **hermitesch symmetrischer Raum** ist eine zusammenhängende hermitesche Mannigfaltigkeit (M, g) , so dass gilt

- (M, g) ist homogen, d. h. die Gruppe $\text{Aut}(M, g)$ der holomorphen Isometrien operiert transitiv
- Existenz von Symmetrien: zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine holomorphe Isometrie s von M , so dass $s^2 = \text{id}$ und so dass p ein isolierter Fixpunkt von s ist.

Grobe Einteilung

| Typ | Krümmung | Automorphismengp. | Beispiel |
|---------------|----------|---------------------------|-------------------------------------|
| Kompakt | pos. | adjungiert, kompakt | $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ |
| Nicht kompakt | neg. | adjungiert, nicht-kompakt | \mathbb{H} |
| Euklidisch | 0 | | $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n/\Gamma$ |

Jeder hermitesch symmetrische Raum M zerfällt als Produkt $M_c \times M_{nc} \times M_0$, wobei M_c von kompaktem Typ, M_{nc} von nicht-kompaktem Typ, M_0 euklidisch.

Definition

Ein **hermitesch symmetrischer Bereich** ist ein hermitesch symmetrischer Raum von nicht-kompaktem Typ.

Beispiele: Reelle Lie-Gruppen

$$SO(p, q) = \left\{ A \in SL(n, \mathbb{R}); {}^t A \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} \right\}$$

$$SO^*(2n) = \left\{ A \in SL_{2n}(\mathbb{C}); {}^t A A = E_{2n}, \right. \\ \left. {}^t A \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \bar{A} = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\}$$

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_{2n}(\mathbb{R}); {}^t A \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\}$$

$$U(p, q) = \left\{ A \in SL_n(\mathbb{C}); {}^t A \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} \bar{A} = \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_q \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiele: hermitesch symmetrische Räume

| | $\dim_{\mathbb{R}}$ |
|---------------------------------|---------------------|
| $SU(p, q)/S(U_p \times U_q)$ | $2pq$ |
| $SO(n, 2)^+/SO(n) \times SO(2)$ | $2n$ |
| $Sp_{2n}(\mathbb{R})/U(n)$ | $n(n+1)$ |
| $SO^*(2n)/U(n)$ | $n(n-1)$ |

Beispiel

- $\mathbb{H} \cong Sp_2(\mathbb{R})/U(1) \cong SU(1, 1)/S(U_1 \times U_1)$

Beschränkte symmetrische Bereiche

Theorem

Jeder beschränkte Bereich kann in kanonischer Weise mit einer hermiteschen Metrik (der sog. Bergmann-Metrik) ausgestattet werden. Diese Metrik hat negative Krümmung.

Theorem

Jeder hermitesch-symmetrische Bereich läßt sich, als komplexe Mf., mit einem beschränkten Bereich in einem geeigneten \mathbb{C}^n identifizieren.

Automorphismen hermitesch-symmetrischer Bereiche

Theorem

Sei M ein hermitesch-symmetrischer Bereich.

- 1 $\text{Aut}(M)^+$ operiert transitiv auf M
- 2 Ist $p \in M$, so ist der Stabilisator K_p von p in $\text{Aut}(M)^+$ kompakt, und

$$\text{Aut}(M)^+ / K_p \xrightarrow{\cong} M, \quad g \mapsto gp$$

ist ein Isomorphismus glatter Mf.

- 3 Es existiert eine zusammenhängende reelle **algebraische** Gruppe $G \subseteq \text{GL}(\text{LieAut}(M))$ mit $G(\mathbb{R})^+ = \text{Aut}(M)^+ = G(\mathbb{R}) \cap \text{Aut}(M)$.

Beispiel

Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ ist eine anti-holomorphe Isometrie von \mathbb{H} , und jede Isometrie ist entweder holomorph, oder unterscheidet sich von $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ um eine holomorphe Isometrie. Es ist $G = PGL_{2,\mathbb{R}}$, $PGL_{2}(\mathbb{R})$ op. holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, und $PGL_{2}(\mathbb{R})^+$ ist der Stabilisator von \mathbb{R} .

Der Homom. $u_p: U_1 \longrightarrow \text{Aut}(D)$

Sei $U_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (als reelle Lie-Gruppe).

Theorem

Sei D ein hermitesch-symmetrischer Bereich. Zu jedem Punkt $p \in D$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $u_p: U_1 \longrightarrow \text{Aut}(D)$, so dass $u_p(z)$ den Punkt p fixiert und auf dem Tangentialraum durch Multiplikation mit z operiert.

Beweis.

- Jedes z mit $|z| = 1$ definiert einen Automorphismus von $(T_p D, g_p)$. Es existiert eine eind. best. Isometrie $u_p(z): D \longrightarrow D$, so dass $du_p(z)_p$ Multiplikation mit z ist. Diese ist holomorph, da \mathbb{C} -linear auf dem Tangentialraum.
- Wegen der Eindeutigkeit ist die resultierende Abbildung $U_1 \longrightarrow \text{Aut}(D)$ ein Gruppenhomomorphismus.



Beispiel

Sei $p = i \in \mathbb{H}$, und sei $h: \mathbb{C}^\times \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$z = a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Dann operiert $h(z)$ auf dem Tangentialraum $T_i\mathbb{H}$ durch Multiplikation mit z/\bar{z} .

Sei nun $z \in U_1$ und $\sqrt{z} \in U_1$ eine Quadratwurzel von z und sei

$$u(z) = h(\sqrt{z}) \quad \text{mod } \pm E_2.$$

Erhalte Homom. $U_1 \longrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$, und $u(z)$ operiert auf $T_i\mathbb{H}$ durch Multiplikation mit z .

Cartan-Involutionen

Sei G eine zusammenhgd. alg. Gruppe über \mathbb{R} . Haben komplexe Konjugation $g \mapsto \bar{g}$ auf $G(\mathbb{C})$.

Definition

Eine Involution $\theta: G \rightarrow G$ heißt **Cartan-Involution**, wenn

$$G^{(\theta)}(\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{C}); g = \theta(\bar{g})\}$$

kompakt ist.

Theorem

- 1 *Es existiert genau dann eine Cartan-Involution für G , wenn G reduktiv ist.*
- 2 *In diesem Fall sind je zwei Cartan-Involutionen unter einem Element von $G(\mathbb{R})$ konjugiert zueinander.*

Beispiel

Sei $G = SL_2(\mathbb{R})$, $\theta = \text{int} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann

$$\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

also ist

$$SL_2^{(\theta)}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}); d = \bar{a}, c = -\bar{b} \right\} = SU_2$$

kompakt.

Beispiel

Sei V ein reeller VR, $G = GL(V)$. Durch Wahl einer Basis von V erhalte Cartan-Involution

$$M \mapsto ({}^t M)^{-1},$$

und alle Cartan-Involutionen von G entstehen auf diese Weise.

Satz

Sei G eine algebraische Gruppe $/\mathbb{R}$, θ eine Involution von G . Dann existiert eine eindeutig bestimmte reelle Form $G^{(\theta)}$ von $G_{\mathbb{C}}$, so dass die komplexe Konjugation auf $G^{(\theta)}$ durch $g \mapsto \theta(\bar{g})$ gegeben ist. Also: Die Cartan-Involutionen von G entsprechen den kompakten Formen von $G_{\mathbb{C}}$.

C-Polarisierungen

Sei G eine zushg. alg. Gruppe $/\mathbb{R}$.

Satz

Ist $G(\mathbb{R})$ kompakt, so läßt sich jede Darstellung $G \rightarrow GL_n, \mathbb{R}$ mit einem G -invarianten Skalarprodukt versehen.

Gibt es umgekehrt eine treue Darstellung mit einem G -invarianten Skalarprodukt, so ist G kompakt.

Definition

Sei $C \in G(\mathbb{R})$, so dass $C^2 \in Z(\mathbb{R})$. Eine C -Polarisierung auf einer Darstellung V von G ist eine G -invariante Bilinearform φ , derart dass die Form

$$\varphi_C: (u, v) \mapsto \varphi(u, Cv)$$

ein Skalarprodukt ist.

Satz

Ist $\text{int}(C)$ eine Cartan-Involution, so trägt jede Darstellung von G eine C -Polarisierung. Gibt es umgekehrt eine treue Darstellung mit einer C -Polarisierung, so ist $\text{int}(C)$ eine Cartan-Involution.

Theorem

Sei D ein hermitesch symmetrischer Bereich, und sei G die zugeh. reelle alg. Gruppe vom adjungierten Typ. Sei $p \in D$.

Der Homom. $u_p: U_1 \longrightarrow G$ hat die folg. Eigenschaften:

- In der zugeh. Darst. von U_1 auf $\text{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ treten nur die Charaktere $z, 1, z^{-1}$ auf.
- $\text{int}(u_p(-1))$ ist eine Cartan-Involution.
- $u_p(-1)$ wird unter keiner Proj. auf einen einfachen Quotient von G auf 1 abgebildet.

Theorem

Sei D ein hermitesch symmetrischer Bereich, und sei G die zugeh. reelle alg. Gruppe vom adjungierten Typ. Sei $p \in D$.

Der Homom. $u_p: U_1 \longrightarrow G$ hat die folg. Eigenschaften:

- In der zugeh. Darst. von U_1 auf $\text{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ treten nur die Charaktere $z, 1, z^{-1}$ auf.
- $\text{int}(u_p(-1))$ ist eine Cartan-Involution.
- $u_p(-1)$ wird unter keiner Proj. auf einen einfachen Quotient von G auf 1 abgebildet.

Ist umgekehrt G eine reelle algebraische Gruppe vom adjungierten Typ, und ist $u: U_1 \longrightarrow G$ mit den obigen Eigenschaften gegeben, so trägt die Konjugationsklasse D von u unter $G(\mathbb{R})^+$ in natürlicher Weise die Struktur eines hermiteschen symmetrischen Bereichs mit $\text{Aut}(D)^+ = G(\mathbb{R})^+$ und s. d. $u(-1)$ die Symmetrie in $u \in D$ ist.

Korollar

Haben 1-1 Korrespondenz

- *Hermitesch-symmetrische Bereiche D mit $p \in D$*
- *Reelle Lie-Gruppen G vom adj. Typ mit $u: U_1 \longrightarrow G$ wie oben.*

Beispiel

Sei $u: U_1 \longrightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ wie oben. Dann ist $u(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, und $\text{int}(u(-1))$ ist eine Cartan-Involution von SL_2 , also auch von PSL_2 .

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung**
- 5 Hodge-Strukturen

Kompaktifizierung der Modulkurve $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

Erweitere \mathbb{H} zu $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ mit **Satake-Topologie**:

Basis offener Umgebungen von ∞ :

$$\{z \in \mathbb{H}; \operatorname{Im} z > N\}$$

Γ operiert auf \mathbb{H}^* , $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ ist kompakt.

Satz

Sei D ein hermitesch symmetrischer Bereich, und sei $\Gamma \subset \text{Aut}(D)^+$ eine diskrete Untergruppe. Ist Γ torsionsfrei, so operiert Γ frei auf D , und es existiert eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur auf $\Gamma \backslash D$, derart dass die Projektion $\pi: D \rightarrow \Gamma \backslash D$ ein lokaler Isomorphismus ist.

Arithmetische Untergruppen

Definition

Zwei Untergruppen H_1, H_2 einer (abstrakten) Gruppe G heißen **kommensurabel**, wenn $H_1 \cap H_2$ von endlichem Index in H_1 und in H_2 ist.

Definition

Sei G eine algebraische Gruppe über \mathbb{Q} . Eine **arithmetische Untergruppe** von $G(\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, die kommensurabel zu $G(\mathbb{Q}) \cap GL_n(\mathbb{Z})$ für eine geeignete Einbettung $G \rightarrow GL_n$ ist.

Satz

Sei $\rho: G \longrightarrow G'$ ein surjektiver Homomorphismus und $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ eine arithmetische Untergruppe. Dann ist $\rho(\Gamma) \subset G'(\mathbb{Q})$ arithmetisch.

Theorem

Sei G eine reductive algebraische Gruppe über \mathbb{Q} , und Γ eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$.

- 1 Der Raum $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ hat genau dann endliches Volumen, wenn $\text{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = 0$.
- 2 Der Raum $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ ist genau dann kompakt, wenn $\text{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = 0$ und $G(\mathbb{Q})$ keine unipotenten Elemente $\neq 1$ hat.

Definition

Sei H eine zusammenhängende reelle Lie-Gruppe. Eine Untergruppe $\Gamma \subset H$ heißt **arithmetisch**, wenn eine algebraische Gruppe G über \mathbb{Q} und eine arithmetische Untergruppe $\Gamma_0 \subset G(\mathbb{Q})$ existieren, so dass $\Gamma_0 \cap G(\mathbb{R})^+$ unter einem surjektiven Homomorphismus $G(\mathbb{R})^+ \rightarrow H$ mit kompaktem Kern surjektiv auf Γ abgebildet wird.

Theorem (Baily, Borel)

*Sei $\Gamma \backslash D$ der Quotient eines hermitesch symmetrischen Bereichs nach einer arithmetischen Untergruppe $\Gamma \subseteq \text{Aut}(D)^+$.
Dann ist $\Gamma \backslash D$ in natürlicher Weise eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven algebraischen Varietät $(\Gamma \backslash D)^*$, und trägt insbesondere die Struktur einer quasi-projektiven algebraischen Varietät.*

Theorem (Borel)

Seien $D, \Gamma, (\Gamma \backslash D)^*$ wie im Theorem von Baily-Borel, und sei Γ torsionsfrei.

Sei V eine glatte quasi-projektive Varietät über \mathbb{C} .

Dann ist jeder Morphismus $f: V^{\text{hol}} \rightarrow (\Gamma \backslash D)^{*,\text{hol}}$ komplexer Varietäten **algebraisch**.

Bem.: Γ torsionsfrei! (Sonst z. B. $\Gamma \backslash D \cong \mathbb{C}$ möglich.)

Korollar

Ist Γ torsionsfrei, so ist die Struktur einer algebraischen Varietät auf $\Gamma \backslash D$ eindeutig bestimmt.

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen über algebraische Gruppen
- 3 Hermitesch-symmetrische Bereiche
- 4 Baily-Borel-Kompaktifizierung
- 5 Hodge-Strukturen**

Hodge-Strukturen

Definition

Eine **Hodge-Zerlegung** eines reellen Vektorraums V ist eine Zerlegung

$$V(\mathbb{C}) := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}^2} V^{p,q},$$

so dass $\overline{V^{q,p}} = V^{p,q}$ für alle p, q .

Definition

Eine **Hodge-Struktur** (HS) ist ein reeller Vektorraum V zusammen mit einer Hodge-Zerlegung.

Reine Hodge-Strukturen

Definition

Eine reine HS vom Gewicht n ist eine HS, so dass

$$V(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}.$$

Allgemein: Gewichtszerlegung $V = \bigoplus_n V_n$, wo

$$V_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}.$$

Definition

Eine **ganze (rationale) HS** ist ein endl. erz. freier \mathbb{Z} -Modul (\mathbb{Q} -Vektorraum) V mit einer Hodge-Zerlegung von $V(\mathbb{R})$, so dass die Gewichtszerlegung über \mathbb{Q} definiert ist.

Definition

Eine **ganze (rationale) HS** ist ein endl. erz. freier \mathbb{Z} -Modul (\mathbb{Q} -Vektorraum) V mit einer Hodge-Zerlegung von $V(\mathbb{R})$, so dass die Gewichtszerlegung über \mathbb{Q} definiert ist.

Beispiel

HS auf Kohomologie $H^*(X, \mathbb{Q})$ einer kompakten Kähler-Mf.

Beispiel

Sei $\mathbb{Q}(m)$ die HS vom Gewicht $-2m$ auf \mathbb{Q} ,
d. h. $(\mathbb{Q}(m))(\mathbb{C}) = \mathbb{Q}(m)^{-m, -m}$. Analog: $\mathbb{R}(m)$, $\mathbb{Z}(m)$.

Beispiel

V Vektorraum $/\mathbb{R}$

Sei $J \in \text{End}(V)$ eine kompl. Struktur, d. h. $J^2 = -1$.

$V^{-1,0}, V^{0,-1} \subseteq V(\mathbb{C})$ die Eigenräume von $J_{\mathbb{C}}$ zum EW $i, -i$.

Diese Konstruktion liefert 1 – 1-Korrespondenz zwischen

- HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ auf V und
- komplexen Strukturen J auf V .

Rationale HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ entspricht \mathbb{Q} -VR V mit kompl. Struktur auf $V(\mathbb{R})$.

Ganze HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ entspricht \mathbb{C} -VR V mit Gitter $\Lambda \subseteq V$.

Hodge-Filtrierung

Definition

Sei V eine HS vom Gewicht n . Dann ist

$$F^\bullet : \dots \supseteq F^p \supseteq F^{p+1} \supseteq \dots, \quad F^p = \bigoplus_{r \geq p} V^{r,s} \subseteq V(\mathbb{C})$$

die zugehörige **Hodge-Filtrierung**.

Die Hodge-Filtrierung bestimmt die Hodge-Zerlegung:

$$V^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}.$$

Der Deligne-Torus \mathbb{S}

Definition

Sei $\mathbb{S} := \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$, d. h. \mathbb{S} ist die algebraische Gruppe über \mathbb{R} , s. d. für alle \mathbb{R} -Alg. R gilt

$$\mathbb{S}(R) = (R \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}.$$

Insbesondere: $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^{\times}$, $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{\times}$.

Können \mathbb{S} identifizieren mit $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$.

Fixiere Isom. $\mathbb{S}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}^{\times}$, so dass

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \text{ geg. durch } z \mapsto (z, \bar{z}).$$

Charaktere von \mathbb{S}

- Charaktere von $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$: $(z_1, z_2) \mapsto z_1^p z_2^q$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.
- Also $X^*(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$, kompl. Konj. operiert durch $(p, q) \mapsto (q, p)$.

Also: \mathbb{S} -Darstellung auf \mathbb{R} -VR ist das gleiche wie eine HS auf V !

Normierung: Zu $h: \mathbb{S} \rightarrow GL(V)$ korrespondiert die HS mit

$$h_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)v = z_1^{-p} z_2^{-q} \text{ für } v \in V^{p,q}.$$

Beispiel

V VR / \mathbb{R} , $J: \mathbb{C} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ komplexe Struktur. Dann ist $h = J|_{\mathbb{C}^{\times}}: \mathbb{C}^{\times} \rightarrow GL(V)$ die zugehörige Darstellung von \mathbb{S} .

Beispiel

$\mathbb{Q}(1)$ entspricht Normcharakter $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{G}_{m, \mathbb{R}}$, $z \mapsto z\bar{z}$.

Gewicht in Termen der \mathbb{S} -Darstellung

Definiere Gewichtshomomorphismus $w: \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S}$ durch

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad r \mapsto r^{-1}$$

Eine Hodge-Struktur V ist genau dann rein vom Gewicht n , wenn für den zugehörigen Morphismus $h: \mathbb{S} \longrightarrow GL(V)$ gilt:
 $(h \circ w)(r) = r^n \text{id}$ für alle $r \in \mathbb{R}^\times$.

Eine rationale Hodge-Struktur entspricht einem \mathbb{Q} -VR V zusammen mit einem Homomorphismus $h: \mathbb{S} \longrightarrow GL(V(\mathbb{R}))$, so dass $h \circ w: \mathbb{G}_m \longrightarrow GL(V(\mathbb{R}))$ über \mathbb{Q} definiert ist.

Morphismen, Tensorprodukte von HS

Definition

Ein Morphismus $V \rightarrow W$ von HS ist ein Vektorraumhomomorphismus, der für alle p, q , $V^{p,q}$ nach $W^{p,q}$ abbildet.

Lemma

Seien V, W HS vom Gewicht m bzw. n . Dann ist $V \otimes W$ mit

$$(V \otimes W)^{p,q} = \bigoplus_{r+r'=p, s+s'=q} V^{r,s} \otimes W^{r',s'}$$

eine HS vom Gewicht $m + n$. Die zugehörige Darstellung von \mathbb{S} ist

$$h_V \otimes h_W: \mathbb{S} \rightarrow GL(V \otimes W).$$

Polarisierungen von Hodge-Strukturen

Sei $V = (V, h: \mathbb{S} \rightarrow GL(V))$ eine HS vom Gewicht n .

Definition

Eine **Polarisierung** von V ist eine Bilinearform $\Psi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

- die zugeh. Abb. $V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}(-n)$ ein Morphismus von HS ist
- die BLF $\Psi_{h(i)}(u, v) := \Psi(u, h(i)v)$ symmetrisch und pos. definit ist.

Allgemeiner: V HS über $R = \mathbb{Z}$ oder $= \mathbb{Q}$, $\Psi: V \times V \rightarrow R$ BLF,
s. d. $\Psi_{\mathbb{R}}$ Polarisierung.

Beispiel Polarisierung

Beispiel

Polarisierung einer HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.

Sei (V, h) eine R -HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$, $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder \mathbb{R} .

Sei $J = h(i)$.

Eine Polarisierung auf (V, h) ist eine alternierende Bilinearform

$$\Psi: V \times V \longrightarrow R,$$

so dass für $u, v \in V(\mathbb{R})$ gilt:

$$\Psi_{\mathbb{R}}(Ju, Jv) = \Psi_{\mathbb{R}}(u, v)$$

$$\Psi_{\mathbb{R}}(u, Ju) > 0 \text{ für } u \neq 0$$

Variationen von HS

Sei V ein \mathbb{R} -VR, $n \in \mathbb{Z}$. Wollen Familien von HS auf V über einer (zushgd.) kpl. Mf. S untersuchen.

Sei für jedes $s \in S$ eine HS $V(\mathbb{C}) = \bigoplus V_s^{p,q}$ vom Gewicht n mit Hodge-Filtrierung F_s^\bullet gegeben.

Die Familie heißt **stetig**, wenn für alle p, q , der Unterraum $V_s^{p,q}$ stetig in s variiert, d. h. wenn $\dim V_s^{p,q}$ konstant und die Abbildung

$$S \longrightarrow \text{Grass}_{\dim V^{p,q}}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto V_s^{p,q} \quad \text{stetig ist.}$$

Eine stetige Familie heißt **holomorph**, wenn die Hodge-Filtrierung holomorph in s variiert, also wenn für alle p die Abbildung

$$S \longrightarrow \text{Grass}_{d(p)}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto F_s^p \quad \text{holomorph ist.}$$

Griffiths-Transversalität

Zu einer holomorphen Familie von HS betrachte

$$\varphi: S \longrightarrow \text{Grass}_{d(p)}(V(\mathbb{C})), \quad s \mapsto F_s^p.$$

Sei $s \in S$. Wir identifizieren den Tangentialraum von $\text{Grass}_{d(p)}$ in $\varphi(s)$ mit $\text{Hom}(F_s^p, V/F_s^p)$. Die betrachtete Familie von HS heißt eine **Variation von Hodge-Strukturen**, wenn für alle s, p gilt:

$$\text{im } d\varphi_s \subseteq \text{Hom}(F_s^p, F_s^{p-1}/F_s^p).$$

Hodge-Tensoren

Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von \mathbb{R} -VR.

Seien $s_j, j \in J$ Elemente von Tensorprodukten von V_i 's und V_i^\vee 's.

Sei $G \subseteq \prod GL(V_i)$ die Untergruppe der Elemente, die alle s_j fixieren.

Lemma

Sei $h: \mathbb{S} \rightarrow \prod GL(V_i)$ eine HS. Genau dann sind alle s_j vom Typ $(0,0)$, wenn h über G faktorisiert.

Betrachten Familien von HS der folgenden Form:

G eine lineare algebraische Gruppe $/\mathbb{R}$, X eine
Zusammenhangskomponente des Raums der Homomorphismen
 $\mathbb{S} \rightarrow G$.

Betrachten Familien von HS der folgenden Form:

G eine lineare algebraische Gruppe $/\mathbb{R}$, X eine Zusammenhangskomponente des Raums der Homomorphismen $\mathbb{S} \rightarrow G$.

So dass für eine Einbettung $G \subseteq \prod GL(V_i)$ gilt:

Gewichtszzerlegung Für alle i ist die Gewichtszzerlegung von V_i unabh. von $h \in X$.

VarHS Für eine geeignete kpl. Str. auf X ist für alle i die Fam. $h \in X$ von HS auf V_i eine VarHS.

Polarisierung Ist V die Komp. vom Gewicht n eines V_i , so existiert $\Psi: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}(-n)$, das für alle $h \in X$ eine Polarisierung der zugehörigen HS auf V ist.

Sei X gegeben, und es gelte **Gewichtszzerlegung**. Sei G_1 die kleinste algebraische Untergruppe von G mit $h(\mathbb{S}) \subseteq G_1$ für alle $h \in X$.

Theorem

- 1 X besitzt eine eindeutig best. komplexe Struktur, für die $(h)_{h \in X}$ eine holomorphe Familie von HS ist.
- 2 **VarHS** \iff $\text{Lie}(G)$ hat Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$ (vermöge der adj. Darst.).
- 3 **Polarisierung** $\iff G_1$ reduktiv und $\text{inh}(i)$ induziert Cartan-Involution auf G_1^{ad} .

Sei X gegeben, und es gelte **Gewichtszzerlegung**. Sei G_1 die kleinste algebraische Untergruppe von G mit $h(\mathbb{S}) \subseteq G_1$ für alle $h \in X$.

Theorem

- 1 X besitzt eine eindeutig best. komplexe Struktur, für die $(h)_{h \in X}$ eine holomorphe Familie von HS ist.
- 2 **VarHS** \iff $\text{Lie}(G)$ hat Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$ (vermöge der adj. Darst.).
- 3 **Polarisierung** $\iff G_1$ reduktiv und $\text{inth}(i)$ induziert Cartan-Involution auf G_1^{ad} .

Korollar

Die Bedingungen sind unabhängig von der Einbettung $G \subseteq \prod GL(V_i)$.

ad 1

Die Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow \text{Flag}\left(\bigoplus V_i\right), \quad h \mapsto F_h^\bullet$$

ist injektiv.

Sei $h_0 \in X$, $K_0 = \text{Stab}_{G(\mathbb{R})^+}(h_0)$. Es ist $X = G(\mathbb{R})^+ h_0$ und durch

$$G(\mathbb{R})^+ / K_0 \xrightarrow{\cong} X$$

wird X zu einer reellen Mf.

h_0 induziert HS auf \mathfrak{g} und $\text{End}(\bigoplus V_i)$. Es ist

$$\text{Lie } K_0 = \mathfrak{g}^{0,0}, \quad \text{also } T_{h_0}X \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0}.$$

Erhalte

$$\begin{array}{ccc}
 T_{h_0}X \cong & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0} \longrightarrow & \text{End}(V)/\text{End}(V)^{0,0} \\
 & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\
 & \mathfrak{g}(\mathbb{C})/F^0 \longrightarrow & \text{End}(V(\mathbb{C}))/F^0 \cong T_{h_0}\text{Flag}
 \end{array}$$

Die Abbildung von oben links nach unten rechts ist $d\varphi_{h_0}$, also ist X fast-komplexe Untermf. von Flag.

ad 2

Wegen **Gewichtszzerlegung** ist die HS auf \mathfrak{g} rein vom Gewicht 0.

Die Familie ist eine Variation von HS, wenn

$$\operatorname{im} d\varphi_{h_0} \subseteq \bigoplus \operatorname{Hom}(F_{h_0}^p, F_{h_0}^{p-1}/F_{h_0}^p),$$

also genau dann, wenn

$$\operatorname{im} d\varphi_{h_0} \subseteq F^{-1}\operatorname{End}(V(\mathbb{C}))/F^0\operatorname{End}(V(\mathbb{C})).$$

Das heißt gerade, dass $F^{-1}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ gelten muss.

ad 3

Sei $G_2 \subseteq G_1$ die kleinste algebraische Untergruppe, so dass $h(U_1) \subseteq G_2$ für alle $h \in X$.

Eine BLF $\Psi: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}(-n)$ erfüllt genau dann **Polarisierung**, wenn $(2\pi i)^n \Psi: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ invariant unter G_2 , und eine $h(i)$ -Polarisierung ist.

Also äquivalent: $\text{int}(h(i))$ ist Cartan-Involution von G_2 .

ad 3

Sei $G_2 \subseteq G_1$ die kleinste algebraische Untergruppe, so dass $h(U_1) \subseteq G_2$ für alle $h \in X$.

Eine BLF $\Psi: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}(-n)$ erfüllt genau dann **Polarisierung**, wenn $(2\pi i)^n \Psi: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ invariant unter G_2 , und eine $h(i)$ -Polarisierung ist.

Also äquivalent: $\text{int}(h(i))$ ist Cartan-Involution von G_2 .

Schließlich:

- G_1 ist Quotient von $G_2 \times \mathbb{G}_m$,
- $Z(G_2)$ ist kompakt,
- $G_1^{\text{ad}} = G_2^{\text{ad}}$.

Beziehung zu hermitesch-symmetrischen Bereichen

Satz

- 1 X mit der komplexen Struktur aus dem Theorem ist ein hermitesch-symmetrischer Bereich.
- 2 Jeder irreduzible hermitesch symmetrische Bereich hat diese Form.

Beziehung zu hermitesch-symmetrischen Bereichen

Satz

- 1 X mit der komplexen Struktur aus dem Theorem ist ein hermitesch-symmetrischer Bereich.
- 2 Jeder irreduzible hermitesch symmetrische Bereich hat diese Form.

Beweis.

ad 1 OE G einfach, vom adjungierten Typ, X eine $G(\mathbb{R})^+$ -Konjugationsklasse von nicht-trivialen Morphismen $h: \mathbb{S}/\mathbb{G}_m \rightarrow G$ mit den obigen Bedingungen.

G nicht kompakt, sonst wäre h trivial.

Sei $h \in X$, $X = G(\mathbb{R})^+/\text{Stab}_{G(\mathbb{R})}(h)$.

$h(i)$ operiert auf dem Tangentialraum $T_h X = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{0,0}$ durch -1 , also ist X symmetrische Riem. Mf. □

Beweis.

ad 2 Sei X ein hermitesch symmetrischer Raum. Für $x \in X$ sei h_x die Verkettung

$$\mathbb{S} \xrightarrow{z \mapsto z/\bar{z}} U_1 \xrightarrow{u_x} \text{Aut}(X)^+.$$

Ist $K = \text{Stab}(x)$, so ist $\text{Lie } K$ vom Typ $(0, 0)$, und $T_x X = \text{Lie } \text{Aut}(X) / \text{Lie } K$ vom Typ $(-1, 1), (1, -1)$.

Da $h(i) = u_x(-1)$, ist $\text{int } h(i)$ eine Cartan-Involution. □